PROBLEMAS

DE

ONDAS ESTACIONARIAS

Autor: ***José Antonio Diego Vives***

Problema 1

Una cuerda de violín de $L = 31{,}6\ \mathrm{cm}$ de longitud y $\mu = 0{,}065\ \mathrm{g/m}$ de densidad lineal, se coloca próxima a un altavoz alimentado por un oscilador de frecuencia variable. Observamos que cuando la frecuencia del oscilador se hace variar continuamente entre 500 y $1500\ \mathrm{Hz}$, la cuerda sólo oscila apreciablemente a las frecuencias de 880 y $1320\ \mathrm{Hz}$. Determinar la tensión a la que está sometida la cuerda.

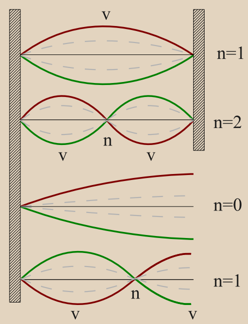
Para resolver este problema utilizaremos las fórmulas obtenidas para las ondas estacionarias generadas en una cuerda o en un tubo:

Cuerda sujeta por los dos extremos:
(tubo cerrado por los dos extremos)

$$L = n\,\frac{\lambda}{2} = n\,\frac{c}{2f}$$

Cuerda sujeta por un extremo:
(tubo abierto por un extremo)

$$L = (2n+1)\,\frac{\lambda}{4} = (2n+1)\,\frac{c}{4f}$$



Ondas estacionarias

Donde L es la longitud de la cuerda o el tubo, λ, c y f son respectivamente la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de la onda, y $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Solución

La cuerda oscilará apreciablemente cuando la frecuencia del sonido que le llega del altavoz sea una de las frecuencias que pueden generar ondas estacionarias en la cuerda. Esto ocurre para dos frecuencias consecutivas $f_1 = 880$ Hz y $f_2 = 1320$ Hz. Aunque desconocemos el valor de n se debe cumplir:

$$\left.\begin{aligned} L &= n\,\frac{c}{2f_1} \\ L &= (n+1)\,\frac{c}{2f_2} \end{aligned}\right\}$$

despejando n de la primera ecuación ($n = 2f_1L/c$) y sustituyendo en la segunda:

$$L = \left(\frac{2f_1L}{c} + 1\right)\frac{c}{2f_2} \;\rightarrow\; 2f_2L = 2f_1L + c \;\rightarrow\; c = 2L\,(f_2 - f_1)$$

Podemos relacionar la velocidad de la onda (c) con la tensión en la cuerda (T) de acuerdo con la fórmula:

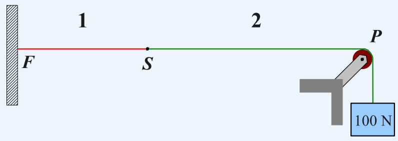
$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \;\rightarrow\; T = c^2\mu$$

de donde obtenemos, sustituyendo la expresión obtenida para c y los valores del problema:

$$T = 4L^2\,(f_2 - f_1)^2\mu = 50{,}26\ \mathrm{N}$$

Problema 2

Un hilo metálico '**1**' de $L_1 = 28{,}28$ cm de longitud y $\mu_1 = 0{,}050$ kg/m de densidad lineal está soldado a otro hilo '**2**' de densidad lineal mitad que la del anterior. Un extremo de estos dos hilos está fijo a una pared en F y en el otro se cuelga un cuerpo de 100 N pasando por una polea como muestra la figura. La longitud del segundo hilo, entre la soldadura S y la polea P, es $L_2 = 100$ cm. Si queremos que a lo largo de los dos hilos entre F y P se formen ondas estacionarias de forma que en S tengamos un nodo, ¿cuál es la frecuencia más baja f_b que podemos aplicar a los hilos? y, en este caso, ¿cuál será el número de vientres n_v que habrán en total a lo largo del segmento FSP?



Solución

Como queremos generar ondas estacionarias de frecuencia f en los dos hilos con un nodo en la soldadura S, cada hilo es como si estuviera sujeto por los dos extremos. Se debe cumplir entonces:

$$\left.\begin{aligned} L_1 = n_1\,\frac{\lambda_1}{2} = n_1\,\frac{c_1}{2f} \\ L_2 = n_2\,\frac{\lambda_2}{2} = n_2\,\frac{c_2}{2f} \end{aligned}\right\}$$

donde se ha tenido en cuenta que L, n, λ y c cambian en cada hilo pero f no.

Dividiendo ambas ecuaciones obtenemos la relación que deben cumplir n_1 y n_2:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{n_1}{n_2}\,\frac{c_1\,\cancel{2f}}{\cancel{2f}\,c_2} \;\rightarrow\; \frac{n_1}{n_2} = \frac{c_2 L_1}{c_1 L_2}$$

Introduciendo la expresión de la velocidad de la onda (c) en función de la tensión en la cuerda (T):

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

obtenemos:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\frac{T}{\mu_2}}L_1}{\sqrt{\frac{T}{\mu_1}}L_2} \;\rightarrow\; \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\mu_1}\,L_1}{\sqrt{\mu_2}\,L_2}$$

y como, de acuerdo con el enunciado del problema $\mu_1 = 2\mu_2$, queda finalemte:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{2\cancel{\mu_2}}\,L_1}{\sqrt{\cancel{\mu_2}}\,L_2} = \sqrt{2}\frac{L_1}{L_2}$$

Sustituyendo los datos del problema, obtenemos:

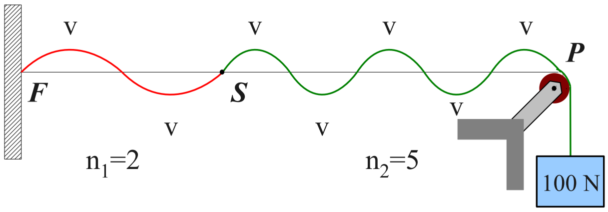
$$\frac{n_1}{n_2} = 0{,}4 = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \ldots$$

La frecuencia más baja compatible con esta relación corresponde con $n_1 = 2$ y $n_2 = 5$, por lo que se debe cumplir (sustituyendo los datos del problema):

$$L_1 = n_1 \frac{c_1}{2f_b} \rightarrow f_b = \frac{n_1\sqrt{\frac{T}{\mu_1}}}{2L_1} = 158{,}1 \text{ Hz}$$

El número de vientres presentes en estas condiciones es 7 como puede apreciarse en la figura.

$$n_v = 7$$



Esquema de las ondas estacionarias en los hilos.

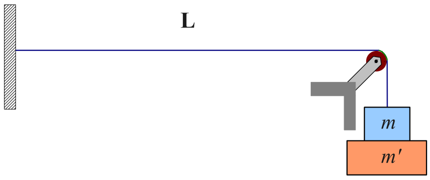
Problema 3

En una cuerda tensa dispuesta horizontalmente uno de sus extremos está fijado en la pared mientras que el otro pasa por una polea y tiene colgada una masa m. Mediante un oscilador se generan ondas estacionarias en la cuerda. ¿Qué masa m' se ha de añadir a la masa m inicial si queremos que la frecuencia del sexto armónico con m y m', sea igual a la frecuencia del séptimo armónico cuando sólo teníamos m?

Solución

En este problema se formarán ondas estacionarias en una cuerda de longitud L sujeta por los dos extremos. Se debe cumplir por lo tanto:

$$L = n\,\frac{\lambda}{2} = n\,\frac{c}{2f}$$



donde λ, c y f son la longitud, velocidad y frecuencia de la onda respectivamente, y $n = 1, 2, ...$ nos indica el número del armónico correspondiente.

L y f no cambian al añadir m', pero si lo hará la tensión en la cuerda T (será el peso de los cuerpos colgados). Esto modificará la velocidad de la onda de acuerdo con la ecuación:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

siendo μ la densidad lineal de la cuerda.

De acuerdo con el enunciado del problema, se debe cumplir por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} L = 7\,\dfrac{c_1}{2f} = 7\,\dfrac{\sqrt{\frac{mg}{\mu}}}{2f} \\ L = 6\,\dfrac{c_2}{2f} = 6\,\dfrac{\sqrt{\frac{(m+m')g}{\mu}}}{2f} \end{array}\right\}$$

Dividiendo las ecuaciones anteriores:

$$\frac{\cancel{L}}{\cancel{L}} = \frac{7\,\dfrac{\sqrt{\frac{m\cancel{g}}{\cancel{\mu}}}}{\cancel{2f}}}{6\,\dfrac{\sqrt{\frac{(m+m')\cancel{g}}{\cancel{\mu}}}}{\cancel{2f}}} \rightarrow 1 = \frac{7}{6}\,\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+m'}}$$

de donde (elevando a cuadrado y despejando m') podemos obtener la relación buscada:

$$m + m' = \frac{7^2}{6^2}\,m \;\rightarrow\; m' = \frac{13}{36}\,m$$

Problema 4

Cuando dos cuerdas de piano idénticas se someten a la misma tensión, suenan con una frecuencia de 400 Hz. ¿En qué fracción debe aumentarse la tensión de una de las cuerdas para que, al vibrar simultáneamente, detectemos cuatro pulsaciones por segundo?

Solución

En ambas cuerdas (idénticas) se producen ondas estacionarias de frecuencia $f_1 = 400$ Hz cuando están sometidas a una tensión T. Se cumple por lo tanto:

$$L = n\,\frac{\lambda}{2} = n\,\frac{c}{2f_1} \;\rightarrow\; f_1 = \frac{c}{2L}$$

donde hemos tomado $n = 1$ ya que las cuerdas vibrarán principalmente en su armónico fundamental.

Expresando c en función de la tensión T y la densidad lineal μ, y elevando al cuadrado obtenemos:

$$f_1 = \frac{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{2L} \;\rightarrow\; {f_1}^2 = \frac{T}{4L^2\mu} \qquad (*)$$

Al aumentar la tensión un ΔT en una de las cuerdas, la nueva frecuencia de oscilación debe cumplir:

$${f_2}^2 = \frac{T + \Delta T}{4L^2\mu} = \frac{T}{4L^2\mu} + \frac{\Delta T}{4L^2\mu} = {f_1}^2 + \frac{\Delta T}{4L^2\mu}$$

Utilizando de nuevo la ecuación $(*)$ $(4L^2\mu = T/{f_1}^2)$ nos queda finalmente:

$${f_2}^2 = {f_1}^2 + \frac{{f_1}^2\Delta T}{T} \;\rightarrow\; \frac{\Delta T}{T} = \frac{{f_2}^2 - {f_1}^2}{{f_1}^2}$$

Las pulsaciones se producen cuando superponemos dos ondas de frecuencias f_1 y f_2 ligeramente diferentes, siendo la frecuencia de las pulsaciones $f_p = |f_2 - f_1|$. El valor numérico de f_2 es por lo tanto:

$$f_p = |f_2 - f_1| \;\rightarrow\; f_2 = f_1 + f_p = 404 \text{ Hz}$$

Sustituyendo los valores numéricos de f_1 y f_2 obtenemos finalmente:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{{f_2}^2 - {f_1}^2}{{f_1}^2} = 0{,}02$$