PROBLEMAS

DE OSCILACIONES.

Oscilaciones amortiguadas.

Autor: ***José Antonio Diego Vives***

Problema 1

Un oscilador armónico amortiguado, cuya frecuencia angular natural es $\omega_0 = 15\ \mathrm{rad/s}$ y cuyo parámetro de amortiguamiento es $\beta = 9\ \mathrm{s}^{-1}$, se encuentra inicialmente en reposo en la posición de equilibrio. En el instante $t = 0$ recibe un impulso que lo pone en movimiento con una velocidad inicial $v_0 = 60\ \mathrm{cm/s}$. Para este sistema se pide:

(a) Expresar la elongación del oscilador en función del tiempo.
(b) Calcular el máximo desplazamiento que experimenta el oscilador a partir de su posición de equilibrio.
(c) Calcular el tiempo que deberá transcurrir para que la amplitud de las oscilaciones amortiguadas se reduzca a un $0{,}1\,\%$ del valor máximo anteriormente calculado.

Solución

Planteamiento
En este problema debemos trabajar con las ecuaciones que describen el movimiento oscilatorio amortiguado (MA):

$$x(t) = A_0\, e^{-\beta t}\, \sin(\omega t + \phi) \qquad A = A_0\, e^{-\beta t}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad E = E_0\, e^{-2\beta t} = E_0\, e^{-t/\tau}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\,, \qquad 2\beta = \frac{b}{m} = \frac{1}{\tau}\,, \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}\,, \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}\,.$$

donde A_0 y E_0 son la amplitud y energía inicial del movimiento, β el parámetro de amortiguamiento, τ el tiempo de relajación de la energía, ω la frecuencia del oscilador amortiguado, ω_0 la frecuencia natural del oscilador (sin amortiguamiento), ϕ la fase inicial, k es la constante elástica de la fuerza recuperadora ($F = -k\,x$), m la masa de la partícula, b es el coeficiente de amortiguamiento que aparece en la fuerza de rozamiento viscosa que amortigua el movimiento ($F_r = -b\,v$) y T y f el periodo y la frecuencia del del movimiento.

(a) Expresar la elongación del oscilador en función del tiempo

Para determinar $x(t)$ necesito evaluar A_0, ω y ϕ.

La fase inicial se puede obtener imponiendo que $x(0) = 0$:

$$x(0) = A_0\, e^{-\beta t}\, \sin(\omega t + \phi) = 0 \ \rightarrow\ \sin(\phi) = 0 \ \rightarrow\ \phi = 0$$

La frecuencia angular del movimiento se puede calcular directamente con los datos del problema:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 12\ \mathrm{rad/s}$$

Y para determinar A_0 podemos hacer uso del valor de v en $t = 0$:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega\, A_0\, e^{-\beta t} \cos(\omega t) - \beta\, A_0\, e^{-\beta t} \sin(\omega t)$$

$$v(0) = \omega\, A_0$$

Por lo tanto, sustituyendo los datos del problema:

$$A_0 = \frac{v(0)}{\omega} = \frac{v(0)}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = 0{,}05 \text{ m}$$

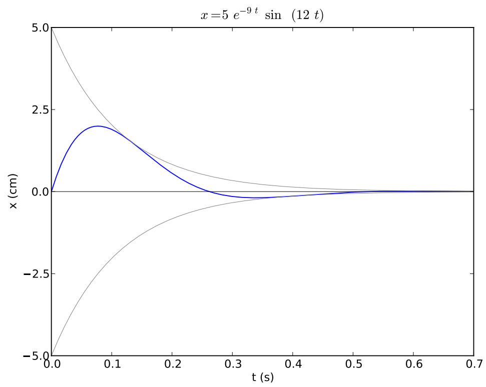
Finalmente nos queda:

$$x(t) = 0{,}05\, e^{-9t} \sin(12\, t) \quad \text{(en } m \text{ y } s\text{)}$$

(b) Calcular el máximo desplazamiento que experimenta el oscilador a partir de su posición de equilibrio.

Como muestra la figura, el máximo desplazamiento de la partícula no tiene lugar en el instante en que $\sin(\omega t) = 1$ (es decir, cuando $x = A\, e^{-\beta t}$), sino un poco antes ya que la función $\sin(\omega t)$ está multiplicada por la función decreciente en el tiempo $A\, e^{-\beta t}$.

Para determinar el máximo desplazamiento, podemos buscar el instante de tiempo en que la velocidad se hace cero por primera vez y luego sustituir en $x(t)$.



x en función de t de este movimiento

Igualando a cero la velocidad:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A_0\, e^{-\beta t}(\omega \cos(\omega t) - \beta \sin(\omega t)) = 0$$

vemos que esto se cumple cuando $\omega \cos(\omega t) = \beta \sin(\omega t)$. Por tanto:

$$\omega \cos(\omega t) = \beta \sin(\omega t) \ \rightarrow \ \tan(\omega t) = \frac{\omega}{\beta}$$

Haciendo la arcotangente de ω/β y despejando t nos queda:

$$\omega\, t = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\beta}\right) \ \rightarrow \ t = \frac{1}{\omega}\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\beta}\right) = 0{,}0772 \text{ s}$$

Sustituyendo este valor de t en $x(t)$ queda:

$$x_{max} = 0{,}05\, e^{-9 \cdot 0{,}0772} \sin(12 \cdot 0{,}0772) = 0{,}01995 \text{ m}$$

(c) Calcular el tiempo que deberá transcurrir para que la amplitud de las oscilaciones amortiguadas se reduzca a un $0{,}1\,\%$ del valor máximo anteriormente calculado.

Queremos ahora que la amplitud de las oscilaciones ($A_0\,e^{-\beta t}$) sea el $0{,}1\,\%$ de x_{max}:

$$x = x_{max} \cdot 0{,}001 = 1{,}99 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}$$

De la ecuación $x(t)$ podemos despejar el tiempo en función de x:

$$x = A_0\,e^{-\beta t} \;\rightarrow\; -\beta\,t = \ln(x/A_0) \;\rightarrow\; t = \frac{1}{\beta}\,\ln\left(\frac{x}{A_0}\right)$$

Sustituyendo el valor calculado para x ($0{,}001\ x_{max}$) queda:

$$t = 0{,}869\ \mathrm{s}$$

Problema 2

Una masa de $m = 0{,}5\ \mathrm{Kg}$, unida a un muelle de constante elástica $k = 250\ \mathrm{N/m}$, oscila con una amplitud inicial $A_0 = 6\ \mathrm{cm}$. Para este sistema se pide:

(a) Hallar el periodo y la energía del oscilador en el instante inicial.
(b) Determinar el valor del parámetro de amortiguamiento del oscilador sabiendo que la energía se disipa a razón de un $1{,}0\,\%$ en cada ciclo.

Solución

Planteamiento
En este problema trabajaremos con las ecuaciones que describen el movimiento oscilatorio amortiguado (MA) introducidas en el problema anterior. La mayoría de las cosas que debemos calcular son una aplicación 'casi' inmediata de las fórmulas.

(a) Hallar el periodo y la energía del oscilador en el instante inicial.

El periodo del movimiento se obtiene a partir de la expresión:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

ω_0 lo podemos calcular, pero desconocemos el parámetro de amortiguamiento β.

De todas formas, dado que la energía se pierde sólo a razón de un $1\,\%$ en cada ciclo, podemos hacer la suposición de que el movimiento es muy débilmente amortiguado y por lo tanto:

$$\beta \ll \omega_0 \;\rightarrow\; T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}281\,\mathrm{s}$$

La energía del oscilador débilmente amortiguado se puede calcular por $E = \frac{1}{2}kA^2$, y en el instante inicial es:

$$E_0 = \frac{1}{2}\,k\,A_0^2 = 0{,}45\,\mathrm{J}$$

(b) Determinar el valor del parámetro de amortiguamiento del oscilador sabiendo que la energía se disipa a razón de un $1{,}0\,\%$ en cada ciclo.

La energía se pierde a razón de un 1 % en cada ciclo, por tanto transcurrido un periodo T la energía del oscilador será el 99 % de E_0 ($E \to 0{,}99\,E_0$). Utilizando este dato:

$$E = 0{,}99\,E_0 \;\to\; \frac{E}{E_0} = 0{,}99 = \frac{\cancel{E_0}\,e^{-2\beta T}}{\cancel{E_0}} = e^{-2\beta T}$$

Tomando logaritmos y despejando β:

$$\ln(0{,}99) = -2\beta T \;\to\; \beta = \frac{-1}{2T}\,\ln(0{,}99) = 0{,}01788\ \mathrm{s}^{-1}$$

Con el valor de β calculado podemos ahora verificar que, efectivamente, la aproximación realizada en el apartado (a), de movimiento muy débilmente amortiguado, es correcta ($\beta^2 \ll \omega_0^2 \;\to\; \omega \approx \omega_0$)

$$\beta^2 = 3{,}197\cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-2} \qquad \text{mucho menor que} \qquad \omega_0^2 = 500\ \mathrm{s}^{-2}$$

Problema 3

Dos cuerpos unidos entre sí uno de masa M y el otro de masa m, se cuelgan del techo por medio de un muelle de constante elástica k. Los dos cuerpos están en reposo, pero en un determinado instante se retira del muelle el cuerpo de masa m por lo que la masa M comienza a oscilar, efectuando un movimiento oscilatorio ligeramente amortiguado debido al rozamiento del cuerpo con el aire. Para este sistema se pide:

(a) Determinar la energía total con que comienza a oscilar dicho cuerpo.
(b) Si la pérdida relativa de amplitud en cada oscilación es p, determinar la pérdida relativa de energía por período, q, en función de p.
(c) Con los datos numéricos: $M = 100$ g, $m = 30$ g, $k = 25$ N/m, $p = 1{,}50\,\%$, calcular el tiempo necesario Δt que debe transcurrir para que la energía del oscilador se reduzca a la cuarta parte de la inicial.

Solución

Planteamiento
En este problema trabajaremos con las ecuaciones que describen el movimiento oscilatorio amortiguado (MA) introducidas en el primer problema. En concreto para resolver cada apartado tendremos en cuenta lo siguiente:

Apartado (a): al retirar el cuerpo de masa m, el sistema realizará un movimiento oscilatorio amortiguado (MA) alrededor de la posición de equilibrio del sistema cuando sólo cuelga el cuerpo de masa M. La amplitud inicial del movimiento será la diferencia entre la posición de equilibrio del MA y la posición inicial (correspondiente a la posición de equilibrio cuando están los cuerpos m y M suspendidos). Determinando esta amplitud inicial podremos determinar la energía inicial del movimiento.

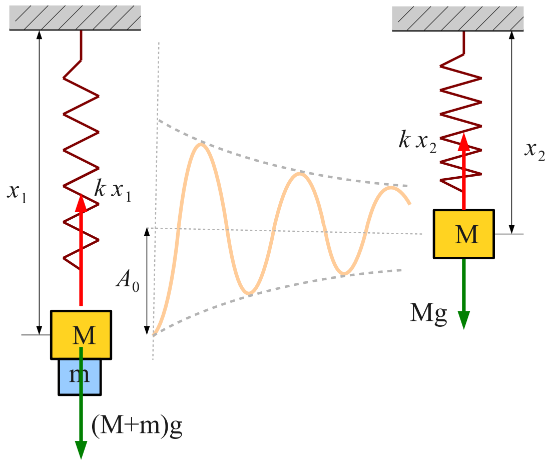
Apartado (b): encontraremos la relación entre p y q a partir de las ecuaciones que describen el movimiento oscilatorio amortiguado (MA).

(a) Determinar la energía total con que comienza a oscilar dicho cuerpo.

La energía inicial del MA es $E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2$, donde A_0 es la diferencia entre la posición de equilibrio cuando sólo tenemos el cuerpo M colgado (x_1) y la posición inicial con los cuerpos m y M colgados (x_2).

Estableciendo las condiciones de equilibrio:

$$\sum F_1 = kx_1 - (M+m)g = 0 \to x_1 = \frac{M+m}{k}g$$
$$\sum F_2 = kx_2 - Mg = 0 \to x_2 = \frac{M}{k}g$$
$$A_0 = x_1 - x_2 = \frac{mg}{k}$$



Situación de equilibrio con $(M+m)$ *y con* M

La energía inicial es por tanto:

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{k}\frac{m^2g^2}{k^{\cancel{2}}} = \frac{m^2g^2}{2k}}$$

(b) Si la pérdida relativa de amplitud en cada oscilación es p, determinar la pérdida relativa de energía por período, q, en función de p.

Definimos la pérdida relativa de amplitud (p) y de energía (q) en un periodo (T) mediante las ecuaciones:

$$p = \frac{A_0 - A_0e^{\beta T}}{A_0} = 1 - e^{\beta T}$$
$$q = \frac{E_0 - E_0e^{2\beta T}}{E_0} = 1 - e^{2\beta T}$$

Para relacionar p con q, desarrollaremos p^2 ya que aparecerá el término $e^{2\beta T}$ presente en q:

$$p^2 = (1 - e^{\beta T})^2 = 1 + e^{2\beta T} - 2e^{\beta T}$$

podemos reescribir esta expresión de la siguiente forma:

$$p^2 = -1 + e^{2\beta T} + 2 - 2e^{\beta T} = -(1 - e^{2\beta T}) + 2(1 - e^{\beta T}) = -q + 2p$$

de donde obtenemos finalmente:

$$\boxed{q = 2p - p^2}$$

(c) Con los datos numéricos: $M = 100$ g, $m = 30$ g, $k = 25$ N/m, $p = 1{,}50\,\%$, calcular el tiempo necesario Δt que debe transcurrir para que la energía del oscilador se reduzca a la cuarta parte de la inicial.

Utilizando la expresión anterior, la pérdida relativa de energía por ciclo es $q \approx 2p = 0{,}03$ (donde hemos despreciado p^2 ya que el movimiento es muy débilmente amortiguado).

Después de un periodo la energía pasa a ser $E_1 = (1-q)E_0$. Después de dos periodos la energía será $E_2 = (1-q)E_1 = (1-q)\ (1-q)\ E_0$. Tras n periodos, la energía del oscilador será:

$$E_n = (1-q)^n\ E_0$$

Imponiendo que la energía del oscilador sea $E_0/4$:

$$E_n = (1-q)^n\ E_0 = \frac{E_0}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{\cancel{E_0}}{4\cancel{E_0}} = (1-q)^n \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{4}\right) = n\ \ln(1-q)$$

de donde, sustituyendo $q = 0{,}03$, obtenemos el número de periodos n que han de pasar:

$$n = \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(1-q)} = 45{,}5$$

Para determinar el tiempo transcurrido podemos considerar que el periodo es $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{M/k}$, ya que el movimiento es muy débilmente amortiguado:

$$\boxed{\Delta t = n\ T = n\ 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 18{,}2\ \mathrm{s}}$$

Problema 4

Un cuerpo de masa $m = 2\ \mathrm{kg}$ descansa sobre un tablero horizontal y está unido al extremo libre de un muelle de constante elástica $k = 200\ \mathrm{N/m}$. En un instante dado, las oscilaciones presentan una amplitud $A_0 = 30\ \mathrm{cm}$; pero debido a un rozamiento de tipo viscoso ($F_r = -bv$), dicha amplitud se reduce a la mitad cuando han transcurrido $t_1 = 25\ \mathrm{s}$. Con estos datos, determinar:

(a) Valor del parámetro de amortiguamiento β, del coeficiente de amortiguamiento b, del tiempo de relajación de la energía τ y del factor de calidad Q.
(b) La frecuencia y el periodo de las oscilaciones amortiguadas y no amortiguadas.
(c) Tiempo que debe transcurrir para que se disipe la mitad de la energía del oscilador.¿Cuál será entonces la amplitud de las oscilaciones?.

Solución

Planteamiento
De nuevo podremos resolver este problema trabajando con las ecuaciones que describen el movimiento oscilatorio amortiguado (MA) introducidas en el problema 1. La mayoría de las cosas que debemos calcular son una aplicación 'casi' inmediata de las fórmulas.

(a) Valor del parámetro de amortiguamiento β, del coeficiente de amortiguamiento b, del tiempo de relajación de la energía τ y del factor de calidad Q.

Sabemos que la amplitud se reduce a la mitad en $t_1 = 25\ \mathrm{s}$:

$$A_1 = \frac{A_0}{2} = A_0\, e^{-\beta t_1} \;\rightarrow\; \frac{\cancel{A_0}}{2\,\cancel{A_0}} = e^{-\beta t_1} \;\rightarrow\; \ln(\tfrac{1}{2}) = -\beta\, t_1$$

de donde, con los datos del problema, obtenemos para β:

$$\beta = \frac{-1}{t_1}\ \ln(\tfrac{1}{2}) = 0{,}0277\ \mathrm{s}^{-1}$$

Para el coeficiente de amortiguamiento b tenemos:

$$b = 2\beta\, m = 0{,}111\ \mathrm{kg\ s}^{-1}$$

y para el tiempo de relajación y el factor de calidad:

$$\tau = \frac{1}{2\beta} = 18{,}02 \text{ s} \qquad \text{y} \qquad Q = \omega_0 \tau = \sqrt{\frac{k}{m}}\, \tau = 180{,}2$$

(b) La frecuencia y el periodo de las oscilaciones amortiguadas y no amortiguadas.

Sustituimos directamente en las fórmulas:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \beta^2} = 10{,}00 \text{ rad/s} \qquad , \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}6283 \text{ s}$$

Para el caso de oscilaciones no amortiguadas:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10{,}00 \text{ rad/s} \qquad , \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}6283 \text{ s}$$

Obtenemos los mismos valores ya que el movimiento es muy débilmente amortiguado ($\beta \ll \omega_0$)

(c) Tiempo que debe transcurrir para que se disipe la mitad de la energía del oscilador.¿Cuál será entonces la amplitud de las oscilaciones?.

Imponemos que $E \to E_0/2$:

$$E = \frac{E_0}{2} = E_0\, e^{-2\beta t} \;\to\; \frac{\cancel{E_0}}{2\,\cancel{E_0}} = e^{-2\beta t} \;\to\; \ln(\tfrac{1}{2}) = -2\beta\, t$$

de donde, con los datos del problema, obtenemos t:

$$t = \frac{-1}{2\beta}\, \ln(\tfrac{1}{2}) = 12{,}489 \text{ s}$$

La amplitud de las oscilaciones en este instante de tiempo será:

$$A = A_0 \, e^{-\beta t} = 21{,}23 \text{ cm}$$

donde hemos usado el valor de t calculado anteriormente y el dato $A_0 = 30$ cm.