

PROBLEMAS

DE ONDAS.

Función de onda, energía.

Autor: *José Antonio Diego Vives*

*Documento bajo licencia
Creative Commons (BY-SA)*

Problema 1

Escribir la función de una onda armónica que avanza hacia x negativas, de amplitud 0,01 m, frecuencia 550 Hz y velocidad 340 m/s. ¿Qué distancia hay entre los dos puntos más próximos que tienen un desfase de 60° ? ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos desplazamientos del mismo punto en un intervalo de tiempo de 10^{-3} s?

Función de onda: La función que describe una perturbación ' y ' viajera de tipo armónico simple que se desplaza por el medio hacia x positivas (' $-ct$ ' en la fórmula) o x negativas (' $+ct$ ' en la fórmula) es:

$$y = y_0 \sin(k(x \mp ct))$$

$$y = y_0 \sin(kx \mp \omega t)$$



Donde y_0 es la amplitud de la onda, k el número de onda, c la velocidad de la onda y $\omega = kc$ su frecuencia angular. Para las ondas armónicas se cumple:

$$\omega = kc, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad T = \frac{1}{f}, \quad \lambda = \frac{c}{f}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

siendo f la frecuencia de la onda, T su periodo y λ la longitud de onda.

Encontrar la función de onda

Como la onda avanza hacia x negativas, la función de onda tendrá el término $+\omega t$:

$$y = y_0 \sin(kx + \omega t)$$

Con los datos que proporciona el enunciado del problema obtenemos los parámetros de esta ecuación:

$$y_0 = 0,01 \text{ m},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \cdot 550 \text{ Hz}}{340 \text{ m/s}} = 10,16 \text{ m}^{-1},$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 550 \text{ Hz} = 1100\pi \text{ rad/s}$$

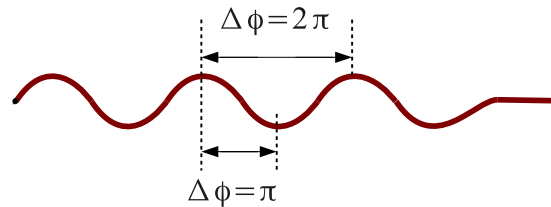
La función de onda es por lo tanto (en metros y segundos):

$$y = 0,01 \sin(10,16 x + 1100\pi t)$$

¿Qué distancia hay entre los dos puntos más próximos que tienen un desfase de 60° ?

Existe una relación lineal entre la distancia entre dos puntos, relativa a la longitud de onda, y el desfase entre éstos. Es decir, dos puntos separados una longitud de onda, λ , presentarán un desfase de 2π rad; si están separados $\lambda/2$ tendrán un desfase de $2\pi/2$ rad, etc.

$$\lambda \rightarrow \Delta\phi = 2\pi$$
$$\Delta x \rightarrow \Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$$



Desfase entre puntos según su separación.

Exigiendo que el desfase entre dos puntos sea $\Delta\phi = 60^\circ = \pi/3$ rad, y sustituyendo el resto de datos del problema, obtenemos la distancia Δx entre los puntos:

$$\Delta x = \frac{\lambda \Delta\phi}{2\pi} = \frac{c \Delta\phi}{f 2\pi} = 0,103 \text{ m}$$

¿Cuál es la diferencia de fase entre dos desplazamientos del mismo punto en un intervalo de tiempo de 10^{-3} s?

El desfase vendrá dado por:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = (\cancel{10,16x} + 1100\pi t_2) - (\cancel{10,16x} + 1100\pi t_1) \rightarrow \Delta\phi = 1100\pi (t_2 - t_1)$$

Sustituyendo $t_2 - t_1 = 10^{-3}$ s, queda finalmente:

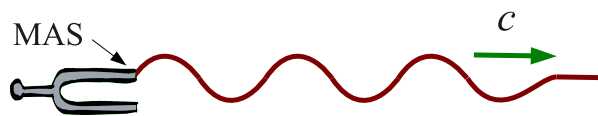
$$\Delta\phi = 3,456 \text{ rad}$$

Problema 2

Atamos un alambre al extremo de un diapasón para generar ondas transversales. La frecuencia del diapasón es $f = 440$ Hz y lo hacemos oscilar con una amplitud $A = 0,5$ mm. El alambre tiene una densidad lineal $\mu = 0,01$ kg/m y está sometido a una tensión $F = 1000$ N. Para este sistema se pide:

- Encontrar el periodo y la frecuencia de las ondas en el alambre.
- ¿Qué velocidad tienen las ondas?
- Escribir la función de la onda que se propaga por el alambre.
- Calcular la velocidad y aceleración máximas de un punto del alambre.
- ¿Qué potencia debemos suministrar al diapasón para que oscile con amplitud constante?

- Encontrar el periodo y la frecuencia de las ondas en el alambre.



Diapasón que genera ondas en un alambre

El diapasón generará un perturbación armónico simple en la cuerda con la frecuencia propia del diapasón. Por lo tanto las ondas generadas tendrán una frecuencia $f = 440$ Hz y un periodo $T = 1/f$.

$$f = 440 \text{ Hz}, \quad T = \frac{1}{f} = 2,273 \times 10^{-3} \text{ s}$$

- ¿Qué velocidad tienen las ondas?

Conocida la tensión en la cuerda y la densidad lineal podemos calcular la velocidad de la onda:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{1000}{0,01}} = 316,2 \text{ m/s}$$

(c) Escribir la función de la onda que se propaga por el alambre.

La onda se propaga en el alambre hacia x positivas, por lo que su función de onda será del tipo:

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$

Podemos determinar los parámetros de esta ecuación con los datos del problema:

$$\begin{aligned} A &= 5 \times 10^{-4} \text{ m,} \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = 8,742 \text{ m}^{-1}, \\ \omega &= 2\pi f = 2\pi \cdot 440 \text{ Hz} = 880\pi \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Y sustituyendo:

$$y = 5 \times 10^{-4} \sin(8,742 x - 880\pi t) \quad \text{en m y s}$$

(d) Calcular la velocidad y aceleración máximas de un punto del alambre.

Cada punto x del alambre realiza un MAS de frecuencia angular $\omega = 880\pi$. Su velocidad y aceleración será por lo tanto:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = -\omega A \cos(-\omega t) \rightarrow v_{max} = \omega A \\ a &= \frac{dv}{dt} = \omega^2 A \sin(-\omega t) \rightarrow a_{max} = \omega^2 A \end{aligned}$$

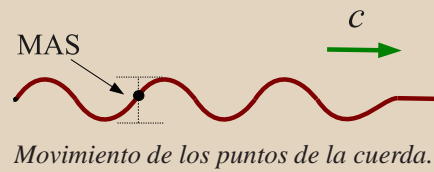
Sustituyendo los datos del problema:

$$v_{max} = 1,382 \text{ m/s,} \quad a_{max} = 3819,9 \text{ m/s}^2$$

(e) ¿Qué potencia debemos suministrar al diapasón para que oscile con amplitud constante?

Densidad de energía y potencia de la onda: Una cuerda por la que se propaga una onda mecánica tiene una cierta energía asociada con el movimiento de los puntos. Además, a medida que la onda se propaga, hay nuevos puntos del medio en movimiento por lo que el emisor debe suministrar una cierta energía por unidad de tiempo (potencia) para mantener el movimiento ondulatorio. La densidad lineal de energía η (energía por unidad de longitud) de la onda y la potencia P suministrada por el emisor es:

$$\eta = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2$$
$$P = \eta c = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 c$$



Donde y_0 es la amplitud de la onda, μ la densidad lineal de la cuerda, c la velocidad de la onda y ω su frecuencia angular.

Podemos obtener la potencia que suministra el diapasón sustituyendo directamente los datos del problema en la fórmula de teoría:

$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 c = 3,02 \text{ W}$$

Problema 3

Una barra de acero transmite ondas longitudinales generadas mediante un oscilador acoplado en un extremo. La barra tiene un diámetro $D = 4$ mm. La amplitud de las oscilaciones es $A = 0,1$ mm y la frecuencia es $f = 10$ oscilaciones por segundo. Para este sistema se pide:

- (a) Función de la onda que se propaga por la barra.
- (b) Energía por unidad de volumen en la barra.
- (c) Potencia media que se propaga a través de una sección cualquiera de la barra

(a) Función de la onda que se propaga por la barra.

Tenemos que determinar los parámetros de la función de onda armónica, que es del tipo:

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$

De acuerdo con los datos del problema: $A = 0,1$ mm y $\omega = 2\pi f = 20\pi$ rad/s.

Para determinar $k = \omega/c$ necesitamos determinar la velocidad de las ondas de presión longitudinales en el acero (c), que viene dada por:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

donde E es el módulo de Young del acero y ρ su densidad. Obteniendo estos valores a partir de las tablas nos queda:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2}{7700 \text{ kg/m}^3}} = 5096,5 \text{ m/s}$$

Finalmente, $k = \omega/c = 0,01233 \text{ m}^{-1}$ y la función de onda queda:

$$y = 1 \times 10^{-4} \sin(0,01233 x - 20\pi t) \quad \text{en m y s}$$

(b) Energía por unidad de volumen en la barra.

La densidad de energía por unidad de longitud en ondas unidimensionales viene dada por:

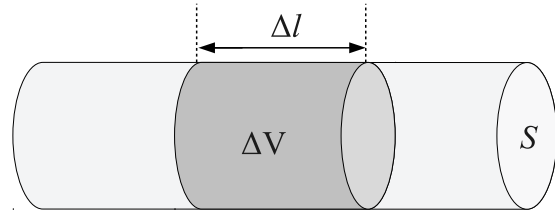
$$\eta = \frac{\Delta E}{\Delta l} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2,$$

donde y_0 es la amplitud de la onda, μ la densidad lineal del medio y ω la frecuencia angular de la onda.

Podemos relacionar la densidad de energía por unidad de longitud ($\Delta E/\Delta l$) con la densidad volumétrica ($\Delta E/\Delta V$) conociendo la sección de la barra S .

Considerando un segmento de la barra Δl de volumen ΔV :

$$\frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{\Delta E}{\Delta l S} = \frac{\mu \omega^2 y_0^2}{2S}$$



Relación entre Δl y ΔV .

Y también podemos relacionar la densidad lineal de masa μ con la densidad volumétrica ρ :

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{\rho S \cancel{\Delta l}}{\cancel{\Delta l}} = \rho S$$

Utilizando esta relación y sustituyendo los datos del problema queda finalmente:

$$\frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{\rho S \omega^2 y_0^2}{2S} = 0,1520 \text{ J/m}^3$$

(c) Potencia media que se propaga a través de una sección cualquiera de la barra.

De acuerdo con la teoría, la potencia media que transmite una onda unidimensional viene dada por:

$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 c$$

Utilizando que $\mu = \rho S$ y que, conocido el diámetro D , $S = \pi D^2/4$, nos queda:

$$P = \frac{\rho \pi D^2 \omega^2 y_0^2 c}{8}$$

Sustituyendo los datos del problema obtenemos finalmente:

$$P = 9,7334 \times 10^{-3} \text{ W}$$

Problema 4

Dos alambres de diferente densidad se sueldan uno a continuación del otro y se someten a una cierta tensión. La velocidad de la onda en el primer alambre es el doble que en el segundo. Cuando la onda armónica se refleja en la unión entre ambos alambres, la onda reflejada tiene la mitad de amplitud que la onda transmitida. Para este sistema se pide:

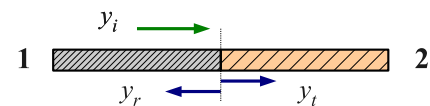
- Suponiendo que no hay pérdidas de energía, ¿qué relación hay entre las amplitudes de las tres ondas?
- ¿Qué fracción de la potencia de la onda se transmite y qué fracción se refleja?

Solución

- Suponiendo que no hay pérdidas de energía, ¿qué relación hay entre las amplitudes de las tres ondas?

Tendremos tres ondas armónicas que se propagan por los alambres; y_i : onda incidente desde el alambre 1, y_t : onda transmitida al alambre 2 y y_r : onda reflejada en el alambre 1.

$$\begin{aligned} y_i &= A_i \sin(k_1 x - \omega t) \\ y_t &= A_t \sin(k_2 x - \omega t) \\ y_r &= A_r \sin(k_1 x + \omega t) \end{aligned}$$



Ondas que se propagan en los alambres

donde se ha tenido en cuenta que ω depende sólo de la onda (no del medio), que k depende del medio y que la onda reflejada avanza hacia la izquierda.

La potencia de cada una de estas ondas viene dada por las expresiones:

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A_i^2 v_1 \\ P_t &= \frac{1}{2} \mu_2 \omega^2 A_t^2 v_2 \\ P_r &= \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A_r^2 v_1 \end{aligned}$$

Además por conservación de la energía se debe cumplir que $P_i = P_t + P_r$:

$$\frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A_i^2 v_1 = \frac{1}{2} \mu_2 \omega^2 A_t^2 v_2 + \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A_r^2 v_1 \rightarrow \mu_1 A_i^2 v_1 = \mu_2 A_t^2 v_2 + \mu_1 A_r^2 v_1 \quad (*)$$

Introduciendo ahora que, de acuerdo con el enunciado, $v_1 = 2v_2$ y que $A_r = A_t/2$:

$$\mu_1 A_i^2 2v_2 = \mu_2 A_t^2 v_2 + \mu_1 \frac{A_t^2}{4} 2v_2 \rightarrow \frac{A_t^2}{A_i^2} = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_1}$$

Podemos encontrar una relación entre las densidades lineales de los alambres teniendo en cuenta que $v_1 = 2v_2$ y que los dos alambres están sometidos a la misma tensión:

$$v_1 = 2v_2 \rightarrow \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = 2\sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \rightarrow \frac{T}{\mu_1} = 4\frac{T}{\mu_2} \rightarrow \mu_2 = 4\mu_1$$

y sustituyendo esta relación en A_t/A_i queda finalmente:

$$\frac{A_t^2}{A_i^2} = \frac{2\mu_1}{4\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1} = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{A_t}{A_i} = \frac{2}{3}$$

Operando de forma análoga a partir de la ecuación (*), pero sustituyendo ahora $A_t = 2A_r$, obtenemos para A_r/A_i :

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{1}{3}$$

(b) ¿Qué fracción de la potencia de la onda se transmite y qué fracción se refleja?

Calculamos los cocientes P_t/P_i y P_r/P_i :

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{\frac{1}{2}\mu_2\omega^2 A_t^2 v_2}{\frac{1}{2}\mu_1\omega^2 A_i^2 v_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{A_t^2}{A_i^2} \frac{v_2}{v_1}$$

$$\frac{P_r}{P_i} = \frac{\frac{1}{2}\mu_1\omega^2 A_r^2 v_1}{\frac{1}{2}\mu_1\omega^2 A_i^2 v_1} = \frac{A_r^2}{A_i^2}$$

Teniendo en cuenta las relaciones encontradas anteriormente para A_r/A_i y A_t/A_i , y que $\mu_2 = 4\mu_1$ y $v_1 = 2v_2$, queda finalmente:

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{8}{9}, \quad \frac{P_r}{P_i} = \frac{1}{9}$$