PROBLEMAS

DE ONDAS.

EFECTO DOPPLER

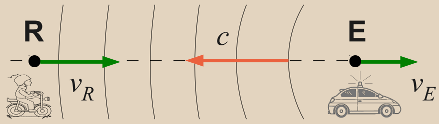
Autor: ***José Antonio Diego Vives***

Problema 1

Una sirena que emite un sonido de $f_E = 1000$ Hz se mueve alejándose de un observador en reposo y dirigiéndose hacia un acantilado con velocidad constante de $v_1 = 10$ m/s. Determinar la diferencia de frecuencia entre la onda que recibe el observador directamente de la sirena y la onda que le llega reflejada en el acantilado.

Para resolver este problema utilizaremos la fórmula del efecto Doppler:

$$\frac{f_E}{c + v_E} = \frac{f_R}{c + v_R}$$



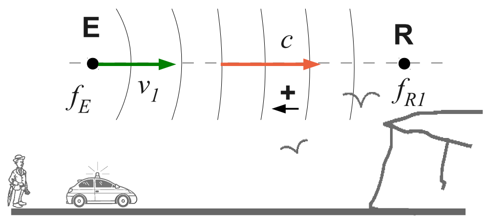
Sentidos positivos de las velocidades

Donde f_E, f_R son las frecuencias a la que se emiten las ondas y a la que se reciben y v_E, v_R y c las velocidades del emisor (E), del receptor (R) y de las ondas respectivamente. Se toma v_E positivo si 'E' se aleja de 'R', y v_R es positivo si 'R' se aproxima a 'E'. c siempre es positiva.

Solución

El observador recibirá las ondas reflejadas en el acantilado con la misma frecuencia a la que estas ondas llegan al acantilado ya que ambos están en reposo. Sin embargo las ondas llegan al acantilado con una frecuencia diferente a f_E ya que el emisor (la sirena) se está moviendo.

Tomando la sirena como emisor y el acantilado como receptor: $v_R = 0$ y $v_E = -v_1$ ya que el emisor se aproxima al receptor (el acantilado). La frecuencia con la que llegan las ondas al acantilado (f_{R1}) y, una vez rebotadas, luego al observador es:



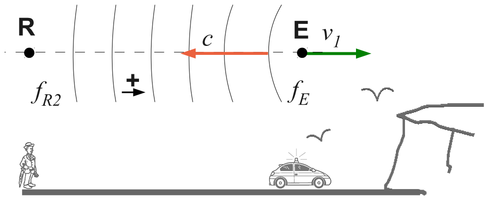
Ondas que llegan y rebotan en el acantilado.

$$\frac{f_E}{c - v_1} = \frac{f_{R1}}{c} \longrightarrow f_{R1} = f_E \frac{c}{c - v_1}$$

Sustituyendo los valores numéricos del problema, obtenenmos:

$$f_{R1} = 1030 \text{ Hz}$$

La frecuencia de las ondas que llegan al observador directamente de la sirena variará también debido al efecto Doppler. Tomando en este caso la sirena como emisor y el observador como receptor: $v_R = 0$ y $v_E = v_1$ ya que el emisor se aleja del receptor. La frecuencia con la que llegan las ondas al observador (f_{R2}) es:



Ondas que llegan directamente al observador.

$$\frac{f_E}{c + v_1} = \frac{f_{R2}}{c} \longrightarrow f_{R2} = f_E \frac{c}{c + v_1}$$

Sustituyendo los valores numéricos del problema, obtenenmos:

$$\boxed{f_{R2} = 971 \text{ Hz}}$$

La diferencia entre las frecuencias que llegan al observador es:

$$\boxed{\Delta f = f_{R1} - f_{R2} = 59 \text{ Hz}}$$

Problema 2

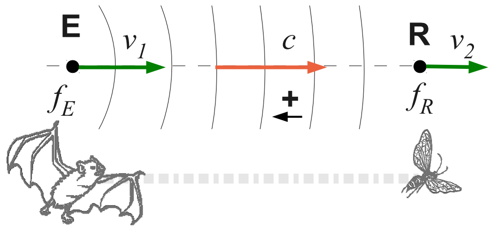
Un murciélago que persigue una mosca emite ultrasonidos a una frecuencia de $55\ \mathrm{kHz}$. El murciélago se mueve a $v_1 = 13\ \mathrm{m/s}$ y la mosca a $v_2 = 2{,}4\ \mathrm{m/s}$ ambos en la misma recta y no hay viento apreciable. Calcular en estas condiciones:

(a) Frecuencia con la que llegan las ondas a la mosca.
(b) Frecuencia que detectará el murciélago para el sonido reflejado en la mosca.

Solución

(a) Frecuencia con la que llegan las ondas a la mosca.

En este caso el murciélago es el emisor y su velocidad es $v_E = -v_1$ ya que el murciélago persigue (se acerca) a la mosca. La mosca es el receptor y $v_R = -v_2$ ya que la mosca se intenta alejar (huye) del murciélago:



Ondas que llegan a la mosca.

$$\frac{f_E}{c - v_1} = \frac{f_R}{c - v_2} \longrightarrow f_R = f_E \frac{c - v_1}{c - v_2}$$

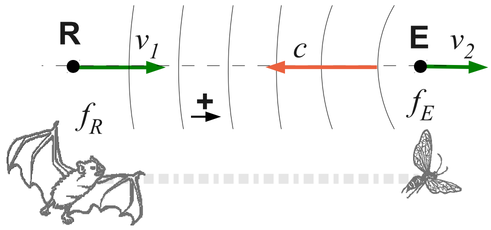
Sustituyendo los valores numéricos del problema, obtenemos:

$$\boxed{f_R = 56{,}78\ \mathrm{kHz}}$$

(b) Frecuencia que detectará el murciélago para el sonido reflejado en la mosca.

Ahora la mosca actúa de emisor reflejando las ondas a la misma frecuencia que le llegan y el murciélago actúa de receptor. En este caso por lo tanto f_E son los $56{,}78\ \mathrm{kHz}$ obtenidos en el apartado anterior.

Tomamos $v_E = +v_2$ ya que la mosca (emisor) se aleja del murciélago. El murciélago (receptor) se acerca a la mosca por lo que $v_R = +v_1$:



Ondas que llegan al murciélago.

$$\frac{f_E}{c+v_2} = \frac{f_R}{c+v_1} \longrightarrow f_R = f_E \frac{c+v_2}{c+v_1}$$

Sustituyendo los valores numéricos del problema, obtenemos:

$$\boxed{f_R = 58{,}54 \text{ kHz}}$$

Problema 3

Un coche se desplaza por una carretera recta con exceso de velocidad. Un radar móvil situado al borde de la carretera emite microondas de frecuencia $f_E = 3 \times 10^9$ Hz. Cuando el coche se está alejando del radar, éste puede medir la velocidad del coche a partir de la interferencia entre las ondas que emite y las ondas que le llegan reflejadas en la parte posterior del vehículo. Si en esta interferencia se producen pulsaciones de frecuencia $f_P = 576$ Hz:

(a) Determinar qué velocidad lleva el coche v_C.

(b) A continuación el coche de policía se dispone a perseguir al vehículo que se da a la fuga acelerando. Si cuando la policía va a 110 km/h el radar indica pulsaciones de 375 Hz, ¿qué velocidad llevará ahora el coche fugado?

Solución

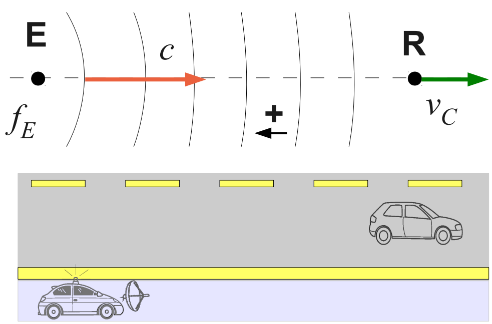
(a) Determinar qué velocidad lleva el coche.

Las ondas que llegan al radar, reflejadas en el coche, tienen una frecuencia diferente a f_E ya que experimentan dos veces el efecto Doppler. Al superponer estas ondas de frecuencia f_R con las ondas originales del radar, se producirán pulsaciones de frecuencia $f_P = |f_E - f_R|$ tal y como predice la teoría.

Para determinar la frecuencia de las ondas que llegan reflejadas al radar tenemos que saber primero con qué frecuencia llegan y rebotan en el coche (efecto Doppler 1) y luego con qué frecuencia el radar recibirá estas ondas rebotadas (efecto Doppler 2).

Frecuencia con que las ondas rebotan en el coche.

En este caso el radar es el emisor y su velocidad es $v_E = 0$ ya que está parado en el arcén. El coche es el receptor y $v_R = -v_C$ ya que se aleja del radar con velocidad v_C:

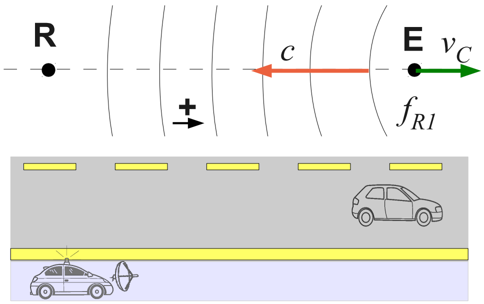


Ondas que llegan al coche.

$$\frac{f_E}{c} = \frac{f_{R1}}{c - v_C} \longrightarrow f_{R1} = f_E \frac{c - v_C}{c}$$

Frecuencia con que las ondas rebotadas llegan al radar.

Ahora el coche actúa de emisor emitiendo con una frecuencia $f_E = f_{R1}$, y su velocidad es $v_E = +v_C$ ya que se aleja del receptor. El radar es el receptor y $v_R = 0$ ya que está parado en el arcen:



Ondas rebotadas que llegan al radar.

$$\frac{f_{R1}}{c+v_C} = \frac{f_{R2}}{c} \longrightarrow f_{R2} = f_{R1}\frac{c}{c+v_C}$$

Sustituyendo la expresión obtenida anteriormente para f_{R1}:

$$f_{R2} = f_E \frac{c-v_C}{\cancel{c}} \frac{\cancel{c}}{c+v_C} = f_E \frac{c-v_C}{c+v_C}$$

Las pulsación que se producirán por la superposición de las ondas son:

$$f_P = |f_E - f_{R2}| = f_E \left(1 - \frac{c-v_C}{c+v_C}\right)$$

de donde se puede despejar la velocidad del coche v_C:

$$v_C = c\frac{f_P}{2f_E - f_P} = 28{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 103{,}7\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

(b) A continuación el coche de policía se dispone a perseguir al vehículo que se da a la fuga acelerando. Si cuando la policía va a $110\ \mathrm{km/h}$ el radar indica pulsaciones de $375\ \mathrm{Hz}$, ¿qué velocidad llevará ahora el coche fugado?

Si se cumple que $c >> v_E,\ v_R$ (totalmente válido para el caso de ondas electromagnéticas), la fórmula del efecto Doppler se puede simplificar por:

$$f_R = f_E\left(1 + \frac{v_r}{c}\right)$$

Donde f_E, f_R son las frecuencias a la que se emiten las ondas y a la que se reciben, $v_r = \pm|v_E - v_R|$ es la velocidad relativa entre el receptor y el emisor tomada positiva si se acercan y negativa si se alejan uno del otro, y c la velocidad de las ondas (siempre positiva).

Si el radar detecta ahora pulsaciones de frecuencia $f_P = 375$ Hz, la frecuencia con la que le llegan al radar las ondas rebotadas en el coche (f_{R2}) es:

$$f_P = |f_E - f_{R2}| \;\rightarrow\; f_{R2} = f_E - f_P = (3 \times 10^9 - 375)\ \mathrm{Hz}$$

donde hemos tomado el signo '$-$' ya que el coche fugado irá a más de $110\ \mathrm{km/h}$ alejándose del coche de policía.

Esta frecuencia f_{R2} es el resultado de aplicar dos veces el efecto Doppler, como se explicó en el apartado (a), por lo que se cumple:

$$f_{R2} = f_{R1}\ \left(1 - \frac{v_r}{c}\right) = f_E\ \left(1 - \frac{v_r}{c}\right)^2$$

de donde podemos despejar la velocidad relativa del coche respecto del coche de policía (v_r):

$$\frac{f_{R2}}{f_E} = \left(1 - \frac{v_r}{c}\right)^2 \;\rightarrow\; v_r = c\left(1 - \sqrt{\frac{f_{R2}}{f_E}}\right)$$

sustituyendo los valores numéricos del problema y el valor de f_{R2} encontrado anteriormente, queda:

$$v_r = 3 \cdot 10^8\ \left(1 - \sqrt{\frac{3 \cdot 10^9 - 375}{3 \cdot 10^9}}\right) = 18{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 67{,}4\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Finalmente, la velocidad del coche fugado será la velocidad que lleva el coche de policía más v_r:

$$\boxed{v_C = 110 + 67{,}4 = 177{,}4\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}$$

Problema 4

Una barca que navega a velocidad v produce ondas superficiales en un estanque debido a una oscilación vertical. La barca efectúa 12 oscilaciones en 20 segundos y cada oscilación produce una cresta de ola. Cada ola tarda $\Delta t = 6\ \mathrm{s}$ en llegar a la orilla que se encuentra a $d = 12\ \mathrm{m}$ de la barca. Además se observa que el ángulo que forman las dos ramas del rastro que deja la embarcación en el estanque es de 90º. Para este caso se pide:

(a) ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas generadas en la superficie del agua?
(b) ¿A qué velocidad se desplaza la barca por el estanque?

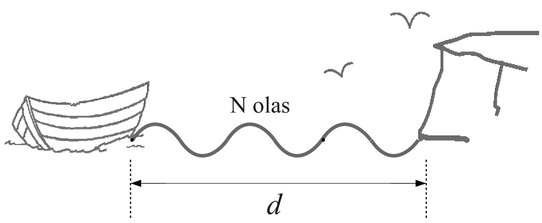
Solución

(a) ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas generadas en la superficie del agua?

Las ondas tardan $\Delta t = 6\ \mathrm{s}$ en recorrer la distancia $d = 12\ \mathrm{m}$ que separa la barca de la orilla. Desde que se genera una onda hasta que llega a la orilla se habrán generado '$N = f\Delta t$' ondas más, siendo f la frecuencia de las ondas.

Estas N ondas generadas durante Δt estarán recorriendo la distancia d, por lo que la longitud de cada onda será:

$$\lambda = \frac{d}{N} = \frac{d}{f\Delta t}$$



Ondas entre la barca y la orilla

Como la barca realiza 20 oscilaciones en 12 segundos; $f = 20/12\ \mathrm{Hz} = 0{,}6\ \mathrm{Hz}$, y la longitud de onda será:

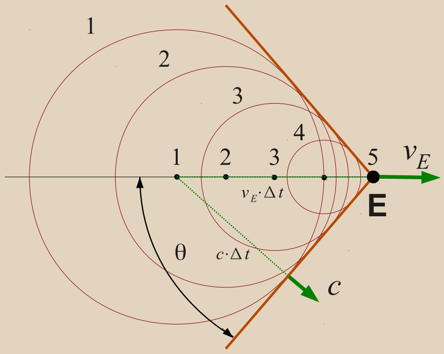
$$\lambda = \frac{12}{0{,}6 \cdot 6} = 3{,}33\ \mathrm{m}$$

(b) ¿A qué velocidad se desplaza la barca por el estanque?

Si el emisor se desplaza a una velocidad v_E superior a la velocidad de las ondas c, las ondas generadas nunca podrán adelantar al emisor y se acumularán detrás de él. Se formará lo que se denomina una ***onda de choque***.

Cada rama de la onda de choque forma un ángulo θ con la dirección de v_E que cumple:

$$\sin\theta = \frac{c\,\cancel{\Delta t}}{v_E\,\cancel{\Delta t}} = \frac{c}{v_E}$$



Podemos calcular v_E a partir del ángulo de la onda de choque que genera la barca:

$$\sin\theta = \frac{c}{v_E} \longrightarrow v_E = \frac{c}{\sin\theta}$$

Como las ondas tardan $\Delta t = 6$ s en recorrer la distancia $d = 12$ m que separa la barca de la orilla, la velocidad de las ondas es $c = d/\Delta t$. De donde obtenemos finalmente sustituyendo los datos del problema:

$$v_E = \frac{c}{\sin\theta} = \frac{d}{\Delta t\ \sin\theta} = 2{,}82\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$