Un documento de elaula.es
BY-SA creative commons Entra en www.elaula.es

PROBLEMAS

DE OSCILACIONES.

Cinemática del movimiento armónico simple

Autor: ***José Antonio Diego Vives***

Documento bajo licencia
CC Attribution-Share Alike 3.0 (BY-SA)

Problema 1

Un pequeño objeto de masa $m = 20$ g se cuelga de un resorte de constante elástica $k = 2$ N/cm que está unido al techo de la habitación efectuando un MAS. En el instante $t = 12$ s dicho objeto se encuentra en la posición $x = 1{,}0$ cm medida respecto de la posición de equilibrio y con velocidad $v = +155{,}0$ cm/s. Dar la ecuación del movimiento que relacione su elongación x con el tiempo t.

Solución

Planteamiento
Debemos determinar los parámetros que aparecen en las ecuaciones cinemáticas del MAS:

$$x(t) = A\ \sin(\omega t + \phi_0)$$
$$v(t) = \omega A\ \cos(\omega t + \phi_0)$$
$$a(t) = -\omega^2 A\ \sin(\omega t + \phi_0)$$

donde ω es la frecuencia angular del movimiento, A la amplitud y ϕ_0 la fase inicial. Además para un sistema masa muelle se cumple $\omega = \sqrt{k/m}$, siendo k la constante elástica del muelle y m la masa de la partícula. Con los datos del problema podremos establecer un sistema de ecuaciones que nos permita resolver el resto de parámetros desconocidos (A y ϕ_0).

La frecuencia angular del movimiento se obtiene directamente con los datos del problema (pasados previamente al sistema internacional):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 100 \text{ rad/s}$$

Para determinar A, vemos que a partir de $x(t)$ y $v(t)$ obtenemos la relación (válida para todo MAS):

$$\left.\begin{aligned} \sin(\omega t + \phi_0) &= \frac{x}{A} \\ \cos(\omega t + \phi_0) &= \frac{v}{\omega A} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 = 1 \rightarrow A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

por lo que, sustituyendo los datos del problema tenemos:

$$A = \sqrt{x_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2}} = 1{,}8446 \text{ cm}$$

Finalmente podemos despejar la fase inicial, ϕ_0, a partir de la ecuación $x(t)$. Sustituyendo los datos del problema:

$$\sin(\omega\, t_1 + \phi_0) = \frac{x_1}{A} = 0{,}54213$$

Tomando el arcseno de este valor:

$$\omega\, t_1 + \phi_0 = \arcsin(0{,}54213) = 0{,}57297\ \mathrm{rad}$$

Hemos de tener en cuenta, sin embargo, que existen dos ángulos posibles φ con el mismo valor de $\sin(\varphi)$; $\varphi_a = \varphi$ y $\varphi_b = \pi - \varphi$. Para determinar cuál de los dos es el correcto debemos de fijarnos en el signo de la velocidad de la partícula:

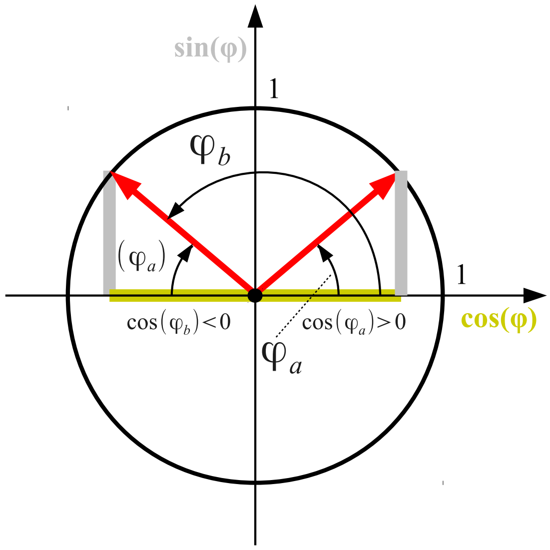
$$\varphi_a = 0{,}57297\ \mathrm{rad}$$
$$\varphi_b = \pi - \varphi_a = 2{,}56863\ \mathrm{rad}$$

Como v_1 es positiva:

$$\cos(\omega\, t + \phi_0) > 0$$

por tanto el valor correcto es:

$$\varphi_a = 0{,}57297\ \mathrm{rad}$$



Ángulos φ_a *y* φ_b *que cumplen* $\sin(\varphi_a) = \sin(\varphi_b)$.

Usando ahora los valores de ω y t_1, despejamos ϕ_0:

$$\phi_0 = 0{,}57297\ \mathrm{rad} - \omega\, t_1 = -1199{,}427\ \mathrm{rad}$$

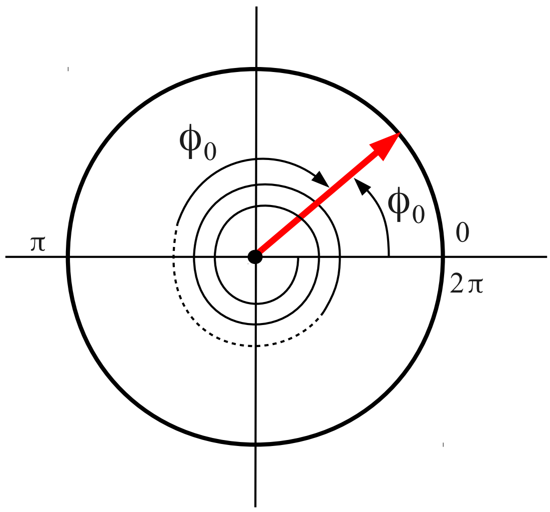
El valor buscado es la fase inicial de la función $\sin(x)$ por lo que no tiene sentido dar un valor de ϕ_0 superior a 2π rad (a partir de $\phi_0 > 2\pi$ rad los valores de $\sin(\phi_0)$ se repiten). El signo menos indica asimismo que las vueltas se realizan en sentido horario. El valor de ϕ_0 comprendido entre 0 y $2\,\pi$ que equivale al valor obtenido anteriormente es: (ver figura)

'Número de vueltas' contenidas en ϕ_0:

$$\frac{-1199{,}427}{2\,\pi} = -190{,}89$$

El valor de ϕ_0 que debemos dar corresponde al ángulo que falta para completar la última vuelta:

$$\phi_0 = (191 - 190{,}89) \cdot 2\,\pi = 0{,}661 \text{ rad}$$



Dos valores de ϕ_0 equivalentes.

Sustituyendo todo en la ecuación $x(t)$ nos queda:

$$x(t) = 1{,}844\ \sin(100\,t + 0{,}661) \ \text{ en cm y s}$$

Problema 2

De una partícula sabemos que realiza un MAS y que en el instante $t_1 = 10$ s su posición, velocidad y aceleración valen respectivamente, $x_1 = -5,8438$ mm, $v_1 = 61,199$ mm/s y $a_1 = 11834$ mm/s^2. Determinar:

(a) ¿Cuál es el periodo del movimiento?
(b) Encontrar la ecuación $x(t)$ del movimiento.
(c) En qué momento t_2, inmediatamente posterior a 20 s, volverá a estar en x_1 con velocidad v_1.
(d) Responde la cuestión anterior pero sin exigir ahora que la velocidad sea necesariamente v_1.

Solución

Planteamiento
En este problema trabajaremos con las ecuaciones cinemáticas del MAS:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\ \cos(\omega t + \phi_0)\\
v(t) &= -\omega A\ \sin(\omega t + \phi_0)\\
a(t) &= -\omega^2 A\ \cos(\omega t + \phi_0)
\end{aligned}
$$

donde ω es la frecuencia angular del movimiento, A la amplitud y ϕ_0 la fase inicial. Además relacionaremos estos parámetros con el periodo T y la frecuencia f de la oscilación mediante $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$.

(a) ¿Cuál es el periodo del movimiento?

Partimos de las ecuaciones del movimiento:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\ \cos(\omega t + \phi_0)\\
v(t) &= -\omega A\ \sin(\omega t + \phi_0)\\
a(t) &= -\omega^2 A\ \cos(\omega t + \phi_0)
\end{aligned}
$$

Dividiendo la tercera ecuación ($a(t)$) entre la primera ($x(t)$) obtenemos con los datos del problema:

$$\frac{a}{x} = -\omega^2 = \frac{11834\ \text{mm/s}^2}{-5,8438\ \text{mm}} \rightarrow \omega = 45\ \text{rad/s}$$

El periodo del movimiento es por tanto:

$$\boxed{T = \tfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}1396\ \text{s}}$$

(b) Encontrar la ecuación $x(t)$ del movimiento.

Nos falta determinar la amplitud A y la fase inicial ϕ_0. Podemos usar la relación que existe entre ω, x, v y A para todo MAS:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\omega t+\phi_0) &= \frac{x}{A}\\ \sin(\omega t+\phi_0) &= \frac{-v}{\omega A}\end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2+\left(\frac{v}{\omega A}\right)^2=1 \rightarrow A=\sqrt{x^2+\frac{v^2}{\omega^2}}$$

por lo que, sustituyendo los datos del problema tenemos:

$$A=\sqrt{x_1^2+\frac{v_1^2}{\omega^2}}=5{,}991196\ \mathrm{mm}$$

Finalmente podemos despejar la fase inicial, ϕ_0, a partir de la ecuación $x(t)$:

$$\cos(\omega\, t_1+\phi_0)=\frac{x_1}{A}=-0{,}97539$$

Tomando el arcocoseno de este valor:

$$\omega\, t_1+\phi_0=\arccos(-0{,}97539)=2{,}9193\ \mathrm{rad}$$

Hemos de tener en cuenta, sin embargo, que existen dos ángulos posibles φ con el mismo valor de $\cos(\varphi)$; $\varphi_a=\varphi$ y $\varphi_b=2\,\pi-\varphi$. Para determinar cuál de los dos es el correcto hemos de fijarnos en la velocidad de la partícula en ese instante, que es positiva:

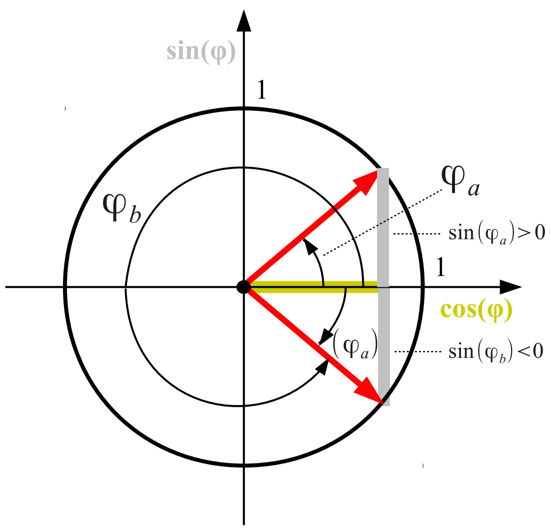
$$\varphi_a=2{,}9193\ \mathrm{rad}$$
$$\varphi_b=2\pi-\varphi_a=3{,}3638\ \mathrm{rad}$$

Como v_1 es positiva:

$$\sin(\omega\, t+\phi_0)<0$$

por tanto el valor correcto es:

$$\varphi_b=3{,}3638\ \mathrm{rad}$$



Ángulos φ_a y φ_b que cumplen $\sin(\varphi_a)=\sin(\varphi_b)$.

Usando ahora los valores de ω y t_1 despejamos ϕ_0:

$$\phi_0 = 3{,}3638 \text{ rad} - \omega\, t_1 = -446{,}6362 \text{ rad}$$

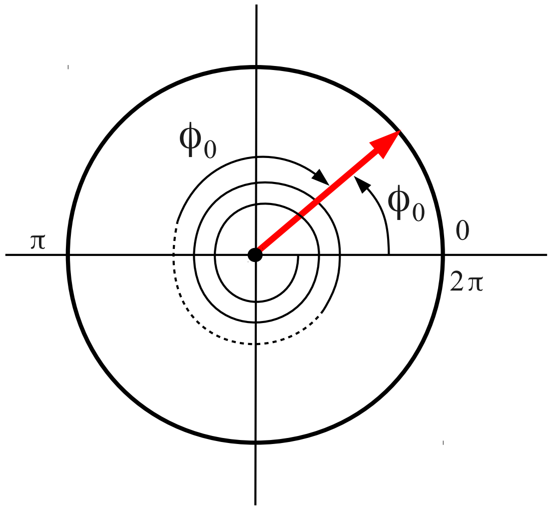
El valor buscado es la fase inicial de la función $\cos(x)$ por lo que no tiene sentido dar un valor de ϕ_0 superior a 2π rad (a partir de $\phi_0 > 2\pi$ rad los valores de $\cos(\phi_0)$ se repiten). El signo menos indica asimismo que las vueltas se realizan en sentido horario. El valor de ϕ_0 comprendido entre 0 y $2\,\pi$ que equivale al valor obtenido anteriormente es: (ver figura)

'Número de vueltas' contenidas en ϕ_0:

$$\frac{-446{,}6362}{2\,\pi} = -71{,}0843$$

El valor de ϕ_0 que debemos dar corresponde al ángulo que falta para completar la última vuelta:

$$\phi_0 = (72 - 71{,}0843) \cdot 2\,\pi = 5{,}75314 \text{ rad}$$



Dos valores de ϕ_0 equivalentes.

Sustituyendo todo en la ecuación $x(t)$ nos queda:

$$x(t) = 5{,}991\ \cos(45\,t + 5{,}75314) \quad \text{en mm y s}$$

(c) En qué momento t_2, inmediatamente posterior a 20 s, volverá a estar en x_1 con velocidad v_1.

La partícula está en x_1 con velocidad v_1 en el instante de tiempo t_1. Volverá a estar en x_1 con velocidad v_1 cada vez que transcurra un periodo completo ($t = t_1 + n\,T$) donde $T = 0{,}1396$ s es el periodo del movimiento.

Miro el número de oscilaciones, n, que realiza la partícula entre $t_1 = 10$ s y 20 s:

$$n = \frac{20\text{ s} - t_1}{T} = 71{,}6$$

El instante de tiempo buscado, posterior a 20 s, es t_1 más el tiempo necesario para realizar 72 oscilaciones completas:

$$t_2 = t_1 + 72 \cdot T = 20{,}0512 \text{ s}$$

(d) Responde la cuestión anterior pero sin exigir ahora que la velocidad sea necesariamente v_1.

Como se ha comentado en el apartado (b), existen dos valores de la fase φ para los que $\cos(\varphi)$ tiene el mismo valor (y por lo tanto la partícula tiene la misma x), mientras que v cambia de signo entre uno y otro. Estos valores de la fase cumplen:

$$\varphi_b = 2\,\pi - \varphi_a$$

En ese apartado vimos que la fase cuando la partícula está en x_1 con velocidad v_1 vale $\varphi_b = 3{,}368 \text{ rad}$. El otro valor de la fase que corresponde con $x = x_1$ pero $v = -v_1$ era:

$$\varphi_a = 2\,\pi - \varphi_b = 2{,}915 \text{ rad}$$

La partícula estará en esta situación (con fase igual a φ_a) en un instante de tiempo $t_3 = t_2 - \Delta t$, donde Δt es el tiempo necesario para que la fase aumente de φ_a a φ_b .

$$|\varphi_b - \varphi_a| = \omega\,\Delta t \;\rightarrow\; \Delta t = 0{,}00988 \text{ s}$$

Como $t_3 = t_2 - \Delta t = 20{,}043$ s es mayor que 20 s, esta es la respuesta a este apartado.

$$t_3 = 20{,}043 \text{ s}$$

Problema 3

Colgamos un cuerpo de masa m del extremo inferior de un muelle, cuya longitud natural es l_0, que está colgado del techo por el otro extremo. Dejamos que el muelle se alargue lentamente, de forma que la masa m desciende suavemente. La longitud del muelle es entonces d. ¿Cuál hubiera sido la longitud máxima que el muelle hubiese alcanzado si hubiéramos dejado caer la masa m si sujetarla?

Solución

Planteamiento
Podemos resolver el problema mecánicamente exigiendo la conservación de la energía. Cuando dejamos caer el cuerpo libremente, las únicas fuerzas que realizan trabajo son el peso ($U_{gr} = mgh$) y el muelle ($U_{el} = \frac{1}{2}k\Delta x^2$). Por otro lado la longitud del muelle cuando lo llevamos lentamente a la posición de equilibrio nos permitirá calcular k.

Exigimos la conservación de la energía mecánica entre el instante inicial (1) y el punto en el que el muelle alcanza la máxima elongación (2).

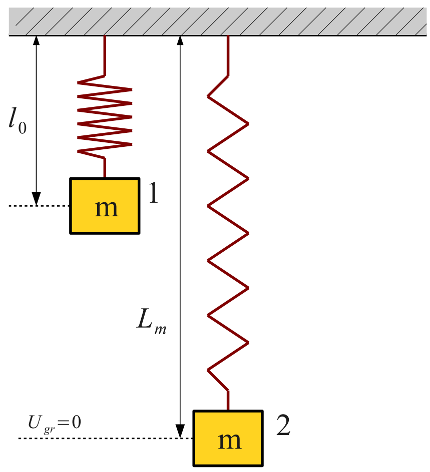
$$E_1 = E_2$$

Tomamos $U_{gr} = 0$ en (2). En este caso, en (1) sólo hay energía potencial gravitatoria, y en (2) sólo tendremos energía potencial elástica:

$$mg\,\cancel{(L_m - l_0)} = \frac{1}{2}k(L_m - l_0)^{\cancel{2}}$$

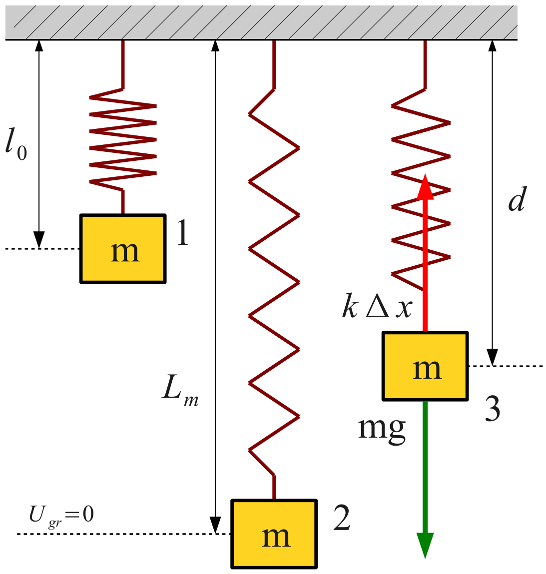
de donde

$$2mg = k(L_m - l_0) \quad (*)$$



Situación inicial (1) y elongación máxima del muelle (2).

Puedo determinar k sabiendo que, cuando bajo el cuerpo lentamente sujetándolo con la mano, el muelle alcanza una longitud d. En este punto el cuerpo se encuentra en equilibrio por lo que la suma de fuerzas debe ser cero:



Situación inicial (1), máxima elongación (2) y posición de equilibrio (3).

$$\sum F_y = 0$$
$$k\,(d - l_0) - mg = 0$$

de donde obtenemos para k:

$$k = \frac{mg}{d - l_0}$$

Sustituyendo este valor en (*) queda:

$$2\cancel{mg} = \frac{\cancel{mg}}{d - l_0}(L_m - l_0) \ \rightarrow \ L_m = 2d - l_0$$

Problema 4

Hacemos oscilar horizontalmente una plataforma con amplitud $A = 40$ cm y con frecuencia variable. Ponemos un cuerpo sobre la plataforma y comprobamos que empieza a deslizar sobre ésta a partir de la frecuencia $f = 0{,}55$ Hz. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático μ entre el cuerpo y la plataforma?

Solución

Planteamiento
El cuerpo situado sobre la plataforma realizará un MAS por lo que su aceleración será:

$$a(t) = -\omega^2 A \, \cos(\omega t + \phi_0)$$

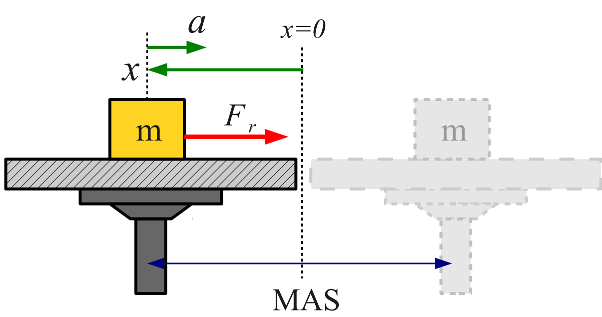
La única fuerza que puede producir esta aceleración es el rozamiento por lo que se debe cumplir $F_r = ma$. Si el cuerpo empieza a deslizar, lo hará en aquellos puntos donde la aceleración es máxima ($a_{max} = \omega^2 A$) y cuando la fuerza de rozamiento alcance su valor máximo posible $F_r = \mu N$ (movimiento inminente). Con todo esto podremos encontrar μ.

Impongo que cuando la aceleración es máxima, $a = \omega^2 A$, la fuerza de rozamiento alcance su valor máximo, $F_r = \mu N$:

$$F_r = ma$$
$$\mu N = m\omega^2 A$$

y como $N = mg$:

$$\mu \cancel{m} g = \cancel{m} \omega^2 A$$
$$\mu = \frac{\omega^2 A}{g}$$



Esquema del movimiento.

Teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi f$, queda:

$$\boxed{\mu = \frac{4\pi^2 f^2 A}{g} = 0{,}487}$$