Física I

(Grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales)

TEMA 2:

DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

Parte de las figuras cedidas por W.H. Freeman/Worth, pertenecientes al libro "Física, 4a. Ed.", P.A. Tipler, Ed. Reverté

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

Tema 2: Dinámica de la partícula.

Leccion 3. Dinámica de la partícula
Leyes de Newton

3.1. Concepto de Fuerza
3.2. Leyes de Newton
3.3. Fuerzas de rozamiento. Cono de roz.
3.4. Partícula en equilibrio estático
3.5 Movimiento interdependiente.
3.6 Sistemas de referencia inerciales y no inerciales.
3.7 Movimiento relativo a la superficie terrestre.
3.8 Cantidad de movimiento.
3.9 Momento angular.
3.10 Fuerzas centrales

Leccion 4. Dinámica de la partícula
Trabajo y energía

4.1 Trabajo y Potencia.
4.2 Energía cinética.
4.3 Energía potencial. Fuerzas conservativas y no conservativas.
4.4 Discusión de curvas de Ep
4.5 Gravitación:
Ley de la gravitación universal
Energía potencial gravitatoria
Movimiento en un campo gravitatorio

Tema 2: Dinámica de la partícula.

Leccion 3. Dinámica de la partícula
Leyes de Newton

3.1. Concepto de Fuerza
3.2. Leyes de Newton
3.3. Fuerzas de rozamiento. Cono de roz.
3.4. Partícula en equilibrio estático
3.5 Movimiento interdependiente.
3.6 Sistemas de referencia inerciales y no inerciales.
3.7 Movimiento relativo a la superficie terrestre.
3.8 Cantidad de movimiento.
3.9 Momento angular.
3.10 Fuerzas centrales

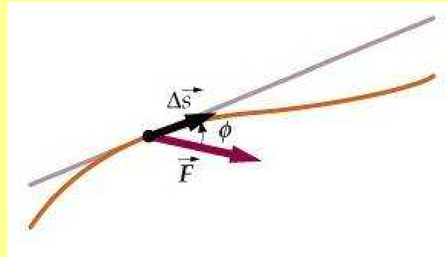
Leccion 4. Dinámica de la partícula
Trabajo y energía

4.1 Trabajo y Potencia.
4.2 Energía cinética.
4.3 Energía potencial. Fuerzas conservativas y no conservativas.
4.4 Discusión de curvas de Ep
4.5 Gravitación:
Ley de la gravitación universal
Energía potencial gravitatoria
Movimiento en un campo gravitatorio

4.1. Trabajo y potencia.

Trabajo infinitesimal:

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$



$$\boxed{\begin{aligned} dW &= F\, dr \cos\phi \\ dW &= F_T\, dr \end{aligned}}$$

Trabajo total:

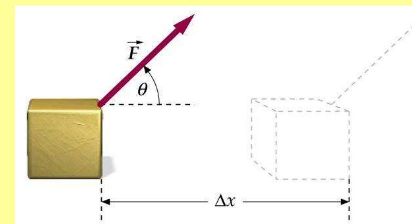
$$\boxed{W = \int_{1,L}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

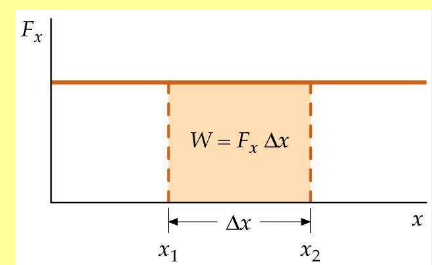
Integral de linea

Si F_T es constante

$$\boxed{W = F\, \Delta x \cos\theta}$$

$$\boxed{[W] = N\,m = Joule}$$





Potencia promedio:

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

Potencia:

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}}$$

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

$$\boxed{[P] = \frac{J}{s} = Watt}$$

Tema 2: Dinámica de la partícula.

Leccion 3. Dinámica de la partícula
Leyes de Newton

3.1. Concepto de Fuerza
3.2. Leyes de Newton
3.3. Fuerzas de rozamiento. Cono de roz.
3.4. Partícula en equilibrio estático
3.5 Movimiento interdependiente.
3.6 Sistemas de referencia inerciales y no inerciales.
3.7 Movimiento relativo a la superficie terrestre.
3.8 Cantidad de movimiento.
3.9 Momento angular.
3.10 Fuerzas centrales

Leccion 4. Dinámica de la partícula
Trabajo y energía

4.1 Trabajo y Potencia.
4.2 Energía cinética.
4.3 Energía potencial. Fuerzas conservativas y no conservativas.
4.4 Discusión de curvas de Ep
4.5 Gravitación:
Ley de la gravitación universal
Energía potencial gravitatoria
Movimiento en un campo gravitatorio

4.2. Energía cinética

Energía cinética

$$\left(W_{1\to 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

Energía cinética

$$\left(W_{1\to 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

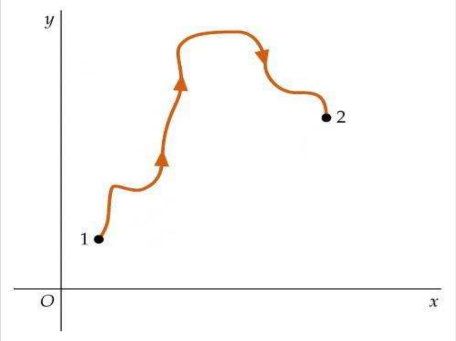
Buscaremos una relación entre el W y la velocidad de la partícula resolviendo la integral de linea, que nos da el trabajo, en función de la velocidad

Energía cinética

$$\left(W_{1\rightarrow 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

Buscaremos una relación entre el W y la velocidad de la partícula resolviendo la integral de linea, que nos da el trabajo, en función de la velocidad

$$\boxed{W_{1\rightarrow 2} = \int_{1,L}^{2} \vec{F} \cdot d\,\vec{r}}$$



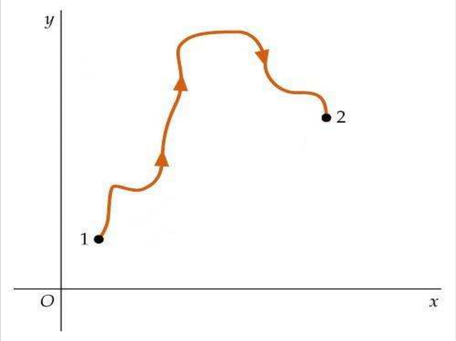
4.2. Energía cinética

Energía cinética

$$\left(W_{1\to 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

Buscaremos una relación entre el W y la velocidad de la partícula resolviendo la integral de linea, que nos da el trabajo, en función de la velocidad

$$\boxed{W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} \Rightarrow W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} F_T \; dr$$



4.2. Energía cinética

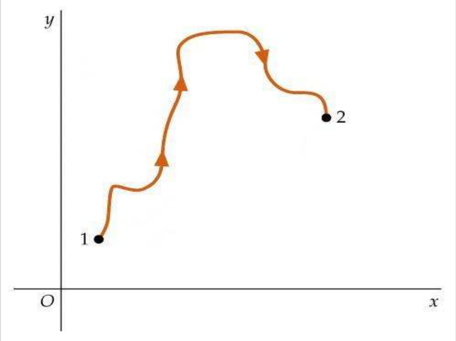
Energía cinética

$$\left(W_{1\to 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

Buscaremos una relación entre el W y la velocidad de la partícula resolviendo la integral de linea, que nos da el trabajo, en función de la velocidad

$$\boxed{W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} \vec{F}\cdot d\vec{r}} \Rightarrow W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} F_T \, dr$$

$$F_T = m a_T$$



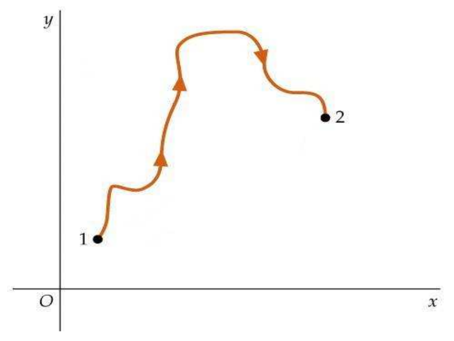
Energía cinética

$$\left(W_{1\to 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

Buscaremos una relación entre el W y la velocidad de la partícula resolviendo la integral de linea, que nos da el trabajo, en función de la velocidad

$$\boxed{W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} \Rightarrow W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} F_T \, dr = \int_{1,L}^{2} m \, a_T \, dr$$

$F_T = m a_T$



4.2. Energía cinética

Energía cinética

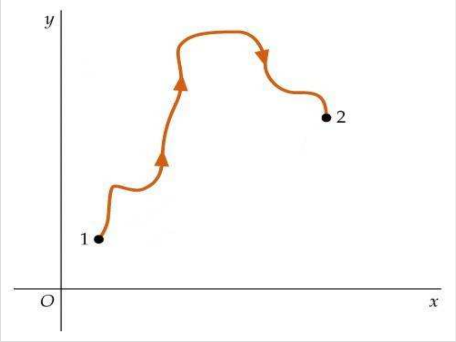
$$\left(W_{1\rightarrow 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

Buscaremos una relación entre el W y la velocidad de la partícula resolviendo la integral de linea, que nos da el trabajo, en función de la velocidad

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{W_{1\rightarrow 2} = \int_{1,L}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} \Rightarrow W_{1\rightarrow 2} = \int_{1,L}^{2} F_T \, dr = \int_{1,L}^{2} m \, a_T \, dr$$

$$F_T = m a_T$$



4.2. Energía cinética

Energía cinética

$$\left(W_{1\to 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

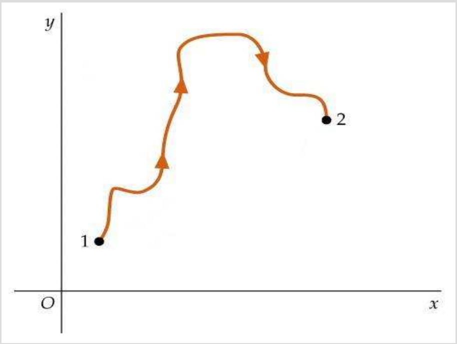
Buscaremos una relación entre el W y la velocidad de la partícula resolviendo la integral de linea, que nos da el trabajo, en función de la velocidad

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} \vec{F}\cdot d\vec{r}} \Rightarrow W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} F_T \, dr = \int_{1,L}^{2} m \, a_T \, dr$$

$$F_T = m a_T$$

$$W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} m \frac{dv}{dt} \, dr$$



4.2. Energía cinética

Energía cinética

$$\left(W_{1\rightarrow 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

Buscaremos una relación entre el W y la velocidad de la partícula resolviendo la integral de linea, que nos da el trabajo, en función de la velocidad

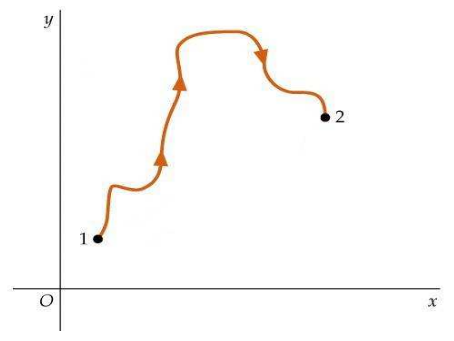
$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{W_{1\rightarrow 2} = \int_{1,L}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} \Rightarrow W_{1\rightarrow 2} = \int_{1,L}^{2} F_T \, dr = \int_{1,L}^{2} m \, a_T \, dr$$

$$\frac{dr}{dt} = v$$

$$F_T = m a_T$$

$$W_{1\rightarrow 2} = \int_{1,L}^{2} m \frac{dv}{dt} dr$$



4.2. Energía cinética

Energía cinética

$$\left(W_{1\to 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

Buscaremos una relación entre el W y la velocidad de la partícula resolviendo la integral de linea, que nos da el trabajo, en función de la velocidad

$$\boxed{W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

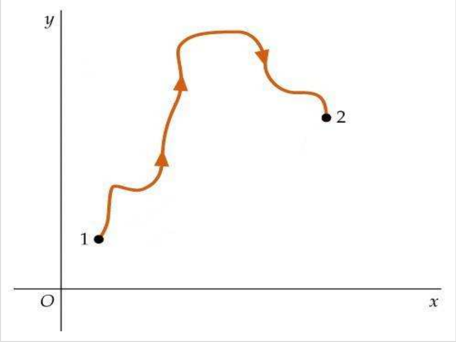
$$W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} F_T \, dr = \int_{1,L}^{2} m \, a_T \, dr$$

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$F_T = m a_T$$

$$\frac{dr}{dt} = v$$

$$W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} m \frac{dv}{dt} dr = \int_{v_1}^{v_2} m \; v \; dv \, dr$$



Energía cinética

$$\left(W_{1\to 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

Buscaremos una relación entre el W y la velocidad de la partícula resolviendo la integral de linea, que nos da el trabajo, en función de la velocidad

$$\boxed{W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} F_T \, dr = \int_{1,L}^{2} m \, a_T \, dr$$

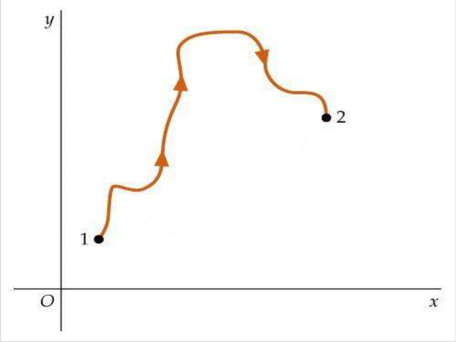
$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$F_T = m a_T$$

$$\frac{dr}{dt} = v$$

$$W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} m \frac{dv}{dt} dr = \int_{v_1}^{v_2} m \, v \, dv \, dr$$

$$\boxed{W_{1\to 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2}$$



4.2. Energía cinética

Energía cinética

$$\left(W_{1\rightarrow 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

Buscaremos una relación entre el W y la velocidad de la partícula resolviendo la integral de linea, que nos da el trabajo, en función de la velocidad

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

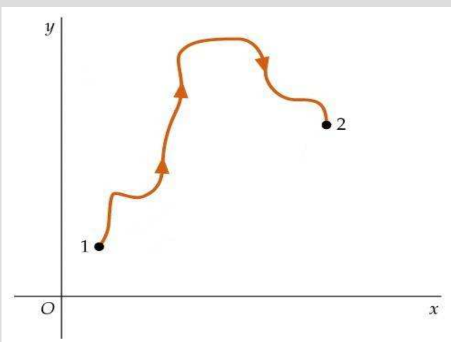
$$\boxed{W_{1\rightarrow 2} = \int_{1,L}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} \Rightarrow W_{1\rightarrow 2} = \int_{1,L}^{2} F_T \, dr = \int_{1,L}^{2} m \, a_T \, dr$$

$$\frac{dr}{dt} = v$$

$$F_T = m a_T$$

$$W_{1\rightarrow 2} = \int_{1,L}^{2} m \frac{dv}{dt} dr = \int_{v_1}^{v_2} m \; v \; dv \, dr$$

$$\boxed{W_{1\rightarrow 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2}$$



Energía cinética

$$\boxed{\begin{array}{c} E_C = \frac{1}{2} m v^2 \\ W_{1\rightarrow 2} = \Delta E_C \end{array}}$$

$$[E_C] = Joule$$

4.2. Energía cinética

Energía cinética

$$\left(W_{1\to 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_C \right)$$

Buscaremos una relación entre el W y la velocidad de la partícula resolviendo la integral de linea, que nos da el trabajo, en función de la velocidad

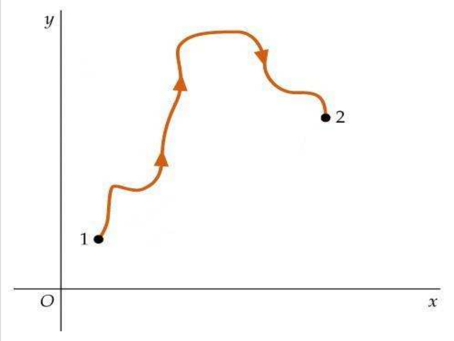
$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} \Rightarrow W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} F_T \, dr = \int_{1,L}^{2} m \, a_T \, dr$$

$$\frac{dr}{dt} = v$$

$$F_T = m a_T$$

$$W_{1\to 2} = \int_{1,L}^{2} m \frac{dv}{dt} dr = \int_{v_1}^{v_2} m \; v \; dv \, dr$$



$$\boxed{W_{1\to 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2}$$

Energía cinética

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} m v^2 \qquad W_{1\to 2} = \Delta E_C}$$

$$[E_C] = Joule$$

Teorema del trabajo-energía

El trabajo total realizado sobre una partícula es igual al incremento en su energía cinética.

Tema 2: Dinámica de la partícula.

Leccion 3. Dinámica de la partícula
Leyes de Newton

3.1. Concepto de Fuerza
3.2. Leyes de Newton
3.3. Fuerzas de rozamiento. Cono de roz.
3.4. Partícula en equilibrio estático
3.5 Movimiento interdependiente.
3.6 Sistemas de referencia inerciales y no inerciales.
3.7 Movimiento relativo a la superficie terrestre.
3.8 Cantidad de movimiento.
3.9 Momento angular.
3.10 Fuerzas centrales

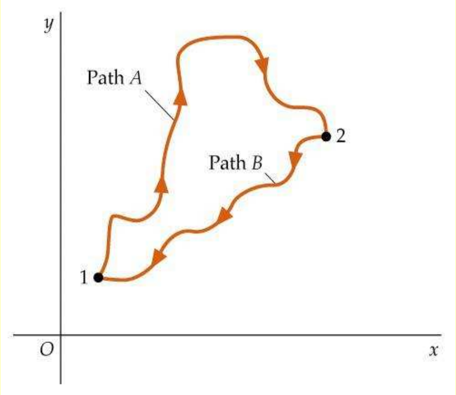
Leccion 4. Dinámica de la partícula
Trabajo y energía

4.1 Trabajo y Potencia.
4.2 Energía cinética.
4.3 Energía potencial. Fuerzas conservativas y no conservativas.
4.4 Discusión de curvas de Ep
4.5 Gravitación:
Ley de la gravitación universal
Energía potencial gravitatoria
Movimiento en un campo gravitatorio

4.3. Energía potencial y energía mecánica total.

Fuerza conservativa

Una fuerza es conservativa si el trabajo realizado sobre una partícula que se desplaza entre dos puntos no depende de la trayectoria recorrida por la partícula. ⟺ $\boxed{\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0}$



Energía potencial

Es una función de las coordenadas tal que:

$\boxed{W_{1\to 2} = E_P(1) - E_P(2)}$ ⟺ $\boxed{W_{1\to 2} = -\Delta E_P}$

Peso: $E_p = m\,g\,h$

Muelle: $E_p = \frac{1}{2} k\,\Delta x^2$

Grav.: $E_p = -G\frac{M\,m}{r}$

Conservación de la energía mecánica.

$$\boxed{\begin{aligned} W_{1\to 2} &= -\Delta E_P \\ W_{1\to 2} &= \Delta E_C \end{aligned}}$$

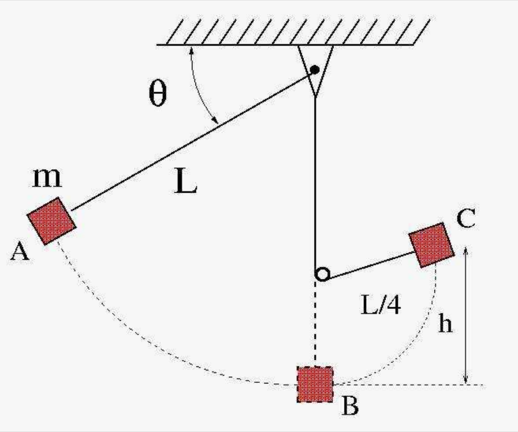
$\Rightarrow -\Delta E_P = \Delta E_C$

$$\boxed{\Delta(E_P + E_C) = 0}$$

*Si en un desplazamiento las fuerzas que realizan trabajo son conservativas, la **energía mecánica** se conserva.*

4.3. Energía potencial y energía mecánica total.

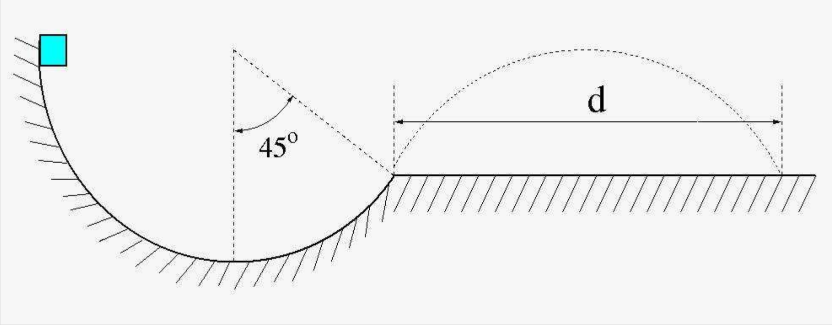
Ejercicio: Una partícula de masa m cae por un plano inclinado sin rozamiento desde una altura h. Cuál será la velocidad de la partícula en la base del plano.



Ejercicio 4.1: Una partícula está sujeta a una cuerda de longitud L y se deja caer desde la posición A indicada en la figura. Determinar la altura h del punto C donde la partícula deja de realizar el movimiento circular BC.

Solución: $$h=\frac{L}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{4\sin\theta}{9}\right)$$

Ejercicio 4.2: Una partícula de masa m cae por una superficie circular sin rozamiento de radio R=2m como muestra la figura. Determinar la distancia d donde la partícula caerá en plano horizontal.



Solución: d = 2.83 m

4.3. Energía potencial. *(con fuerzas no conservativas)*

Si hay fuerzas no conservativas que realizan trabajo:

4.3. Energía potencial. *(con fuerzas no conservativas)*

Si hay fuerzas no conservativas que realizan trabajo:

$$W_{1\to 2} = W_{F.C.} + W_{F.n.C.}$$

4.3. Energía potencial. *(con fuerzas no conservativas)*

Si hay fuerzas no conservativas que realizan trabajo:

$$W_{1\to 2} = W_{F.C.} + W_{F.n.C.}$$

$$\Delta E_C = -\Delta E_p + W_{F.n.C.}$$

4.3. Energía potencial. *(con fuerzas no conservativas)*

Si hay fuerzas no conservativas que realizan trabajo:

$$W_{1\rightarrow 2} = W_{F.C.} + W_{F.n.C.}$$

$$\Delta E_C = -\Delta E_p + W_{F.n.C.}$$

$$\boxed{\Delta\left(E_P + E_C\right) = W_{F.n.C.}}$$

4.3. Energía potencial. *(con fuerzas no conservativas)*

Si hay fuerzas no conservativas que realizan trabajo:

$$W_{1\to 2} = W_{F.C.} + W_{F.n.C.}$$

$$\Delta E_C = -\Delta E_p + W_{F.n.C.}$$

Teorema generalizado del Trabajo-Energía

$$\boxed{\Delta\left(E_P + E_C\right) = W_{F.n.C.}}$$

OJO: El trabajo de las fuerzas de rozamiento casi siempre es negativo

4.3. Energía potencial. *(con fuerzas no conservativas)*

Si hay fuerzas no conservativas que realizan trabajo:

$$W_{1\to 2} = W_{F.C.} + W_{F.n.C.}$$

$$\Delta E_C = -\Delta E_p + W_{F.n.C.}$$

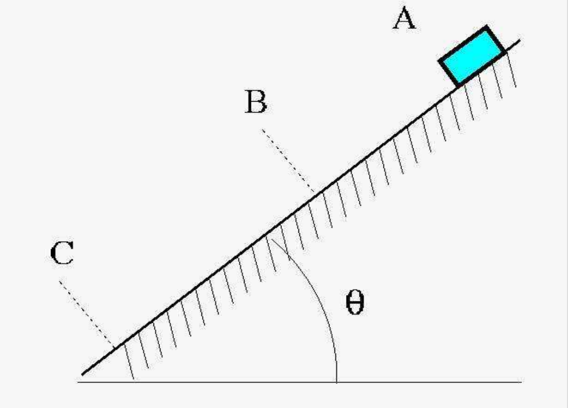
Teorema generalizado del Trabajo-Energía

$$\boxed{\Delta\left(E_P + E_C\right) = W_{F.n.C.}}$$

OJO: El trabajo de las fuerzas de rozamiento casi siempre es negativo

4.3. Energía potencial. *(con fuerzas no conservativas)*

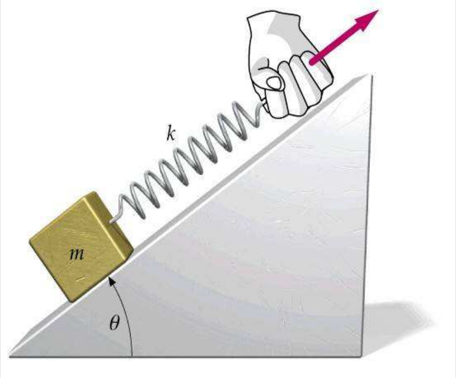
Ejercicio 4.3: Una partícula de masa m se deja caer por un plano inclinado un ángulo θ=25º desde el punto A como indica la figura. Entre A y B no hay rozamiento, mientras a partir de B el coeficiente de rozamiento vale μ=0.8. Si la distancia AB=2m, determinar la distancia BC donde la partícula se detendrá.



Ejercicio 4.4: Un bloque de masa m descansa sobre un plano rugoso inclinado θ grados sobre la horizontal. El bloque está unido a un muelle de constante k como muestra la figura. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es μ_s. Tiramos muy lentamente hacia arriba del muelle hasta que el bloque empieza a moverse. Se pide:

a) Alargamiento, d, del muelle en el momento en que empieza a moverse el bloque.

b) Valor del coeficiente de rozamiento dinámico, μ_d,tal que el bloque se detenga justo cuando el muelle tiene su longitud natural.



Solución:

$$d=(mg/k)(\sin\theta+\mu_s\cos\theta)$$

$$\mu_d=\tan\theta-\frac{1+\mu_s\cos\theta}{2}$$

Tema 2: Dinámica de la partícula.

Leccion 3. Dinámica de la partícula
Leyes de Newton

3.1. Concepto de Fuerza
3.2. Leyes de Newton
3.3. Fuerzas de rozamiento. Cono de roz.
3.4. Partícula en equilibrio estático
3.5 Movimiento interdependiente.
3.6 Sistemas de referencia inerciales y no inerciales.
3.7 Movimiento relativo a la superficie terrestre.
3.8 Cantidad de movimiento.
3.9 Momento angular.
3.10 Fuerzas centrales

Leccion 4. Dinámica de la partícula
Trabajo y energía

4.1 Trabajo y Potencia.
4.2 Energía cinética.
4.3 Energía potencial. Fuerzas conservativas y no conservativas.
4.4 Discusión de curvas de Ep
4.5 Gravitación:
Ley de la gravitación universal
Energía potencial gravitatoria
Movimiento en un campo gravitatorio

4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Fuerza que actúa sobre la partícula, en función de Ep(x)

Se puede obtener la fuerza usando la definición de Ep:

$$\boxed{\begin{gathered} W_{1\rightarrow 2} = \int_1^2 F\cdot dr \\[2em] W_{1\rightarrow 2} = -\Delta E_P \end{gathered}}$$

4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Fuerza que actúa sobre la partícula, en función de Ep(x)

Se puede obtener la fuerza usando la definición de Ep:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 F \cdot dr$$

$$W_{1\to 2} = -\Delta E_P$$

$$\int_1^2 F \cdot dr = -\Delta E_p$$

4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Fuerza que actúa sobre la partícula, en función de Ep(x)

Se puede obtener la fuerza usando la definición de Ep:

$$\boxed{\begin{array}{l} W_{1\to 2} = \int_1^2 F \cdot dr \\ \\ W_{1\to 2} = -\Delta E_P \end{array}}$$

$$\int_1^2 F \cdot dr = -\Delta E_p = -\int_1^2 dE_p$$

4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Fuerza que actúa sobre la partícula, en función de Ep(x)

Se puede obtener la fuerza usando la definición de Ep:

$$W_{1\rightarrow 2} = \int_1^2 F\cdot dr$$

$$W_{1\rightarrow 2} = -\Delta E_P$$

$$\int_1^2 F\cdot dr = -\Delta E_p = -\int_1^2 dE_p$$

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Fuerza que actúa sobre la partícula

4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Fuerza que actúa sobre la partícula, en función de Ep(x)

Se puede obtener la fuerza usando la definición de Ep:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 F\cdot dr$$

$$W_{1\to 2} = -\Delta E_P$$

$$\int_1^2 F\cdot dr = -\Delta E_p = -\int_1^2 dE_p$$

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Fuerza que actúa sobre la partícula

Ejemplos:

Para la fuerza peso:

4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Fuerza que actúa sobre la partícula, en función de Ep(x)

Se puede obtener la fuerza usando la definición de Ep:

$$W_{1\rightarrow 2} = \int_1^2 F \cdot dr$$

$$W_{1\rightarrow 2} = -\Delta E_P$$

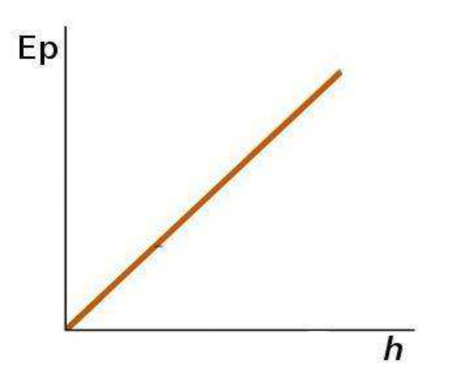
$$\int_1^2 F \cdot dr = -\Delta E_p = -\int_1^2 dE_p$$

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Fuerza que actúa sobre la partícula

Ejemplos:

Para la fuerza peso:



$E_p = m g h$

4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Fuerza que actúa sobre la partícula, en función de Ep(x)

Se puede obtener la fuerza usando la definición de Ep:

$$W_{1\rightarrow 2}=\int_1^2 F\cdot dr$$

$$W_{1\rightarrow 2}=-\Delta E_P$$

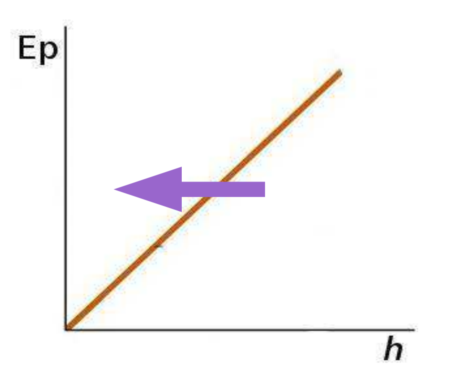
$$\int_1^2 F\cdot dr=-\Delta E_p=-\int_1^2 dE_p$$

$$\boxed{F=-\frac{dE_p}{dr}}$$

Fuerza que actúa sobre la partícula

Ejemplos:

Para la fuerza peso:



$$E_p=m\,g\,h$$

$$F=\frac{-dE_p}{dh}=-m\,g$$

4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Fuerza que actúa sobre la partícula, en función de Ep(x)

Se puede obtener la fuerza usando la definición de Ep:

$$\boxed{\begin{array}{l} W_{1\to 2} = \int_1^2 F\cdot dr \\ \\ W_{1\to 2} = -\Delta E_P \end{array}}$$

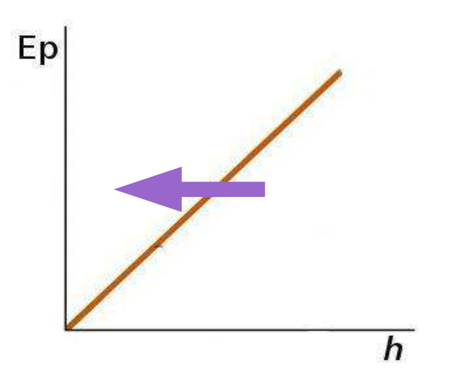
$$\Rightarrow \quad \int_1^2 F\cdot dr = -\Delta E_p = -\int_1^2 dE_p$$

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Fuerza que actúa sobre la partícula

Ejemplos:

Para la fuerza peso:



$$E_p = m g h$$

$$F = \frac{-dE_p}{dh} = -m g$$

Para un muelle:

4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Fuerza que actúa sobre la partícula, en función de Ep(x)

Se puede obtener la fuerza usando la definición de Ep:

$$W_{1\rightarrow 2}=\int_1^2 F\cdot dr$$

$$W_{1\rightarrow 2}=-\Delta E_P$$

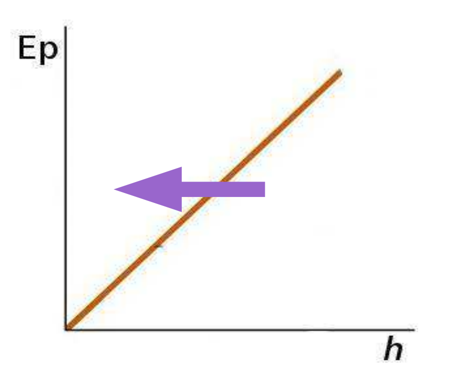
$$\int_1^2 F\cdot dr=-\Delta E_p=-\int_1^2 dE_p$$

$$\boxed{F=-\frac{dE_p}{dr}}$$

Fuerza que actúa sobre la partícula

Ejemplos:

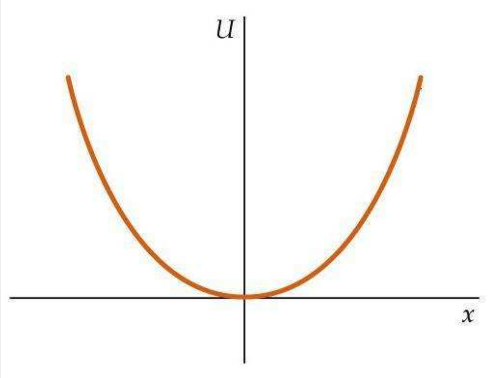
Para la fuerza peso:



$$E_p=m\,g\,h$$

$$F=\frac{-dE_p}{dh}=-m\,g$$

Para un muelle:



$$E_p=\frac{1}{2}k\,x^2$$

4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Fuerza que actúa sobre la partícula, en función de Ep(x)

Se puede obtener la fuerza usando la definición de Ep:

$$W_{1\rightarrow 2} = \int_1^2 F\cdot dr$$

$$W_{1\rightarrow 2} = -\Delta E_P$$

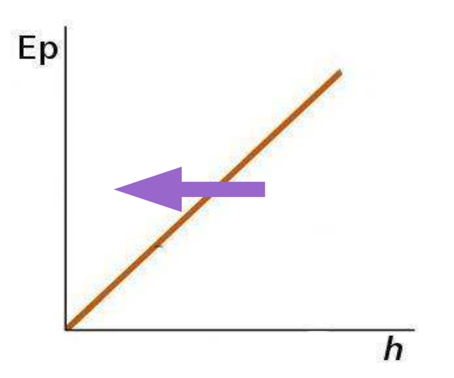
$$\int_1^2 F\cdot dr = -\Delta E_p = -\int_1^2 dE_p$$

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Fuerza que actúa sobre la partícula

Ejemplos:

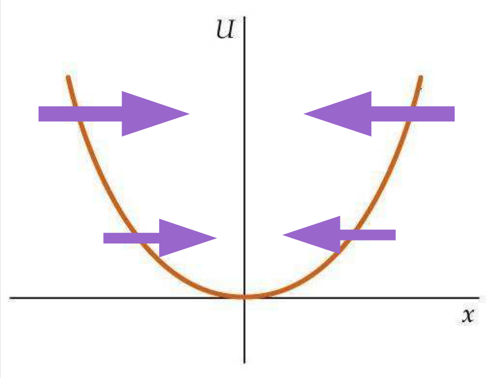
Para la fuerza peso:



$$E_p = m\,g\,h$$

$$F = \frac{-dE_p}{dh} = -m\,g$$

Para un muelle:



$$E_p = \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$F = \frac{-dE_p}{dx} = -k\,x$$

4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

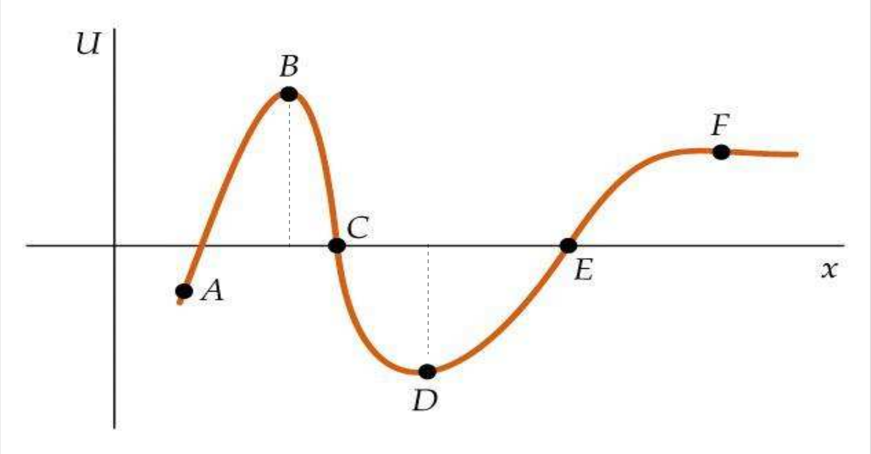
4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Ejemplo:



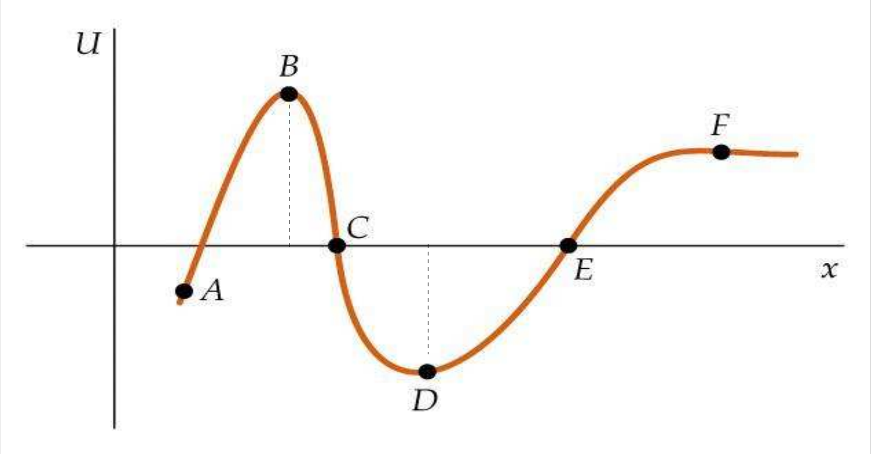
4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Ejemplo:



- X_B y X_D =>

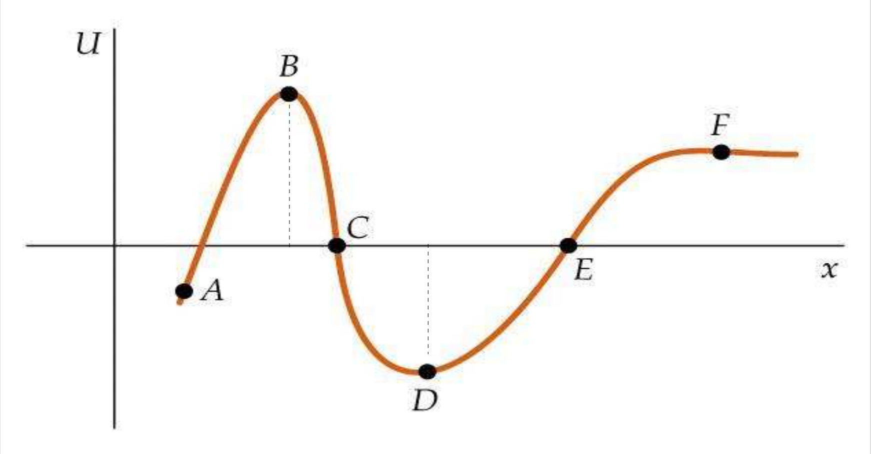
4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Ejemplo:



- X_B y X_D => puntos donde F=0

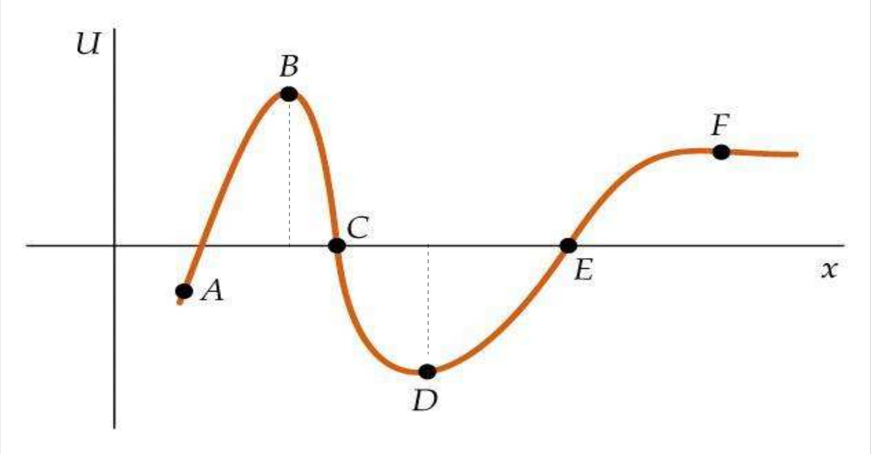
4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Ejemplo:



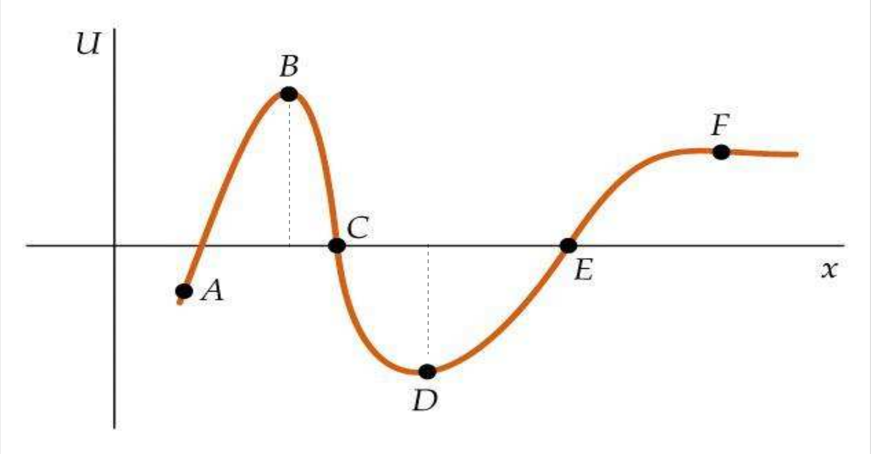
- X_B y X_D => puntos donde F=0
  X_B y X_D :**Puntos de equilibrio**

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Ejemplo:



- X_B y X_D => puntos donde F=0

  X_B y X_D :**Puntos de equilibrio**

  X_B : **equilibrio inestable**

  X_D : **equilibrio estable**

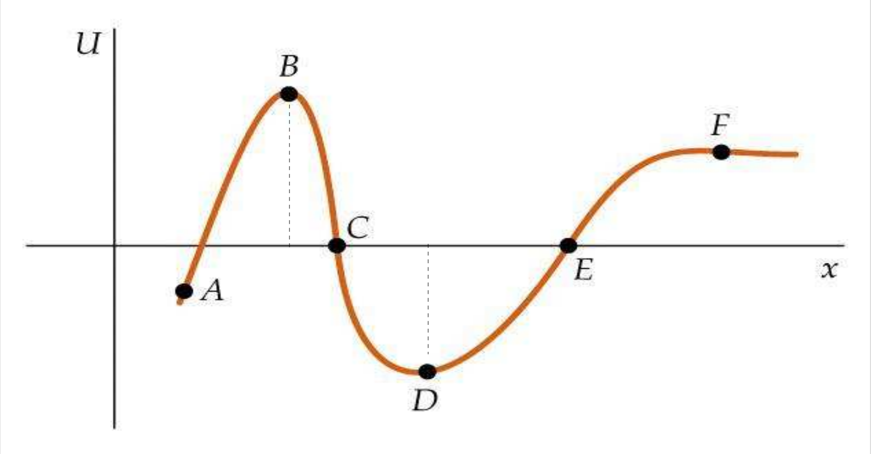
4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Ejemplo:



- X_B y X_D => puntos donde F=0
  X_B y X_D :**Puntos de equilibrio**
  X_B : **equilibrio inestable**
  X_D : **equilibrio estable**
- Si por ejemplo Ep=0 =>

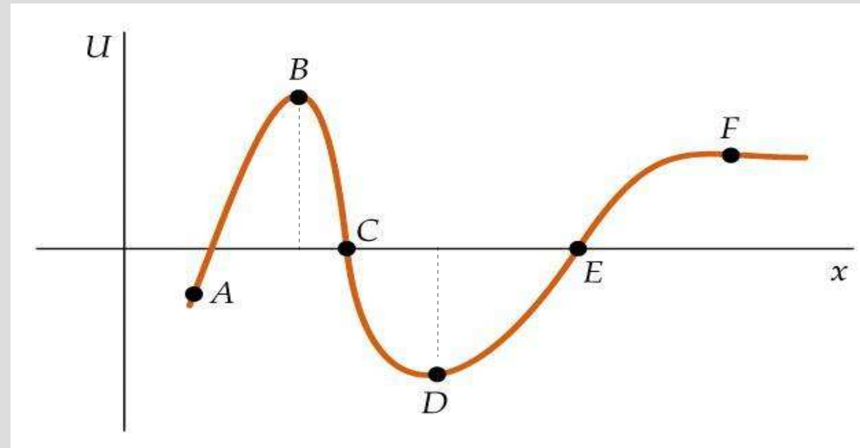
4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Ejemplo:



- X_B y X_D => puntos donde F=0
  X_B y X_D :**Puntos de equilibrio**
  X_B : **equilibrio inestable**
  X_D : **equilibrio estable**
- Si por ejemplo Ep=0 => la partícula se mueve entre X_C y X_E

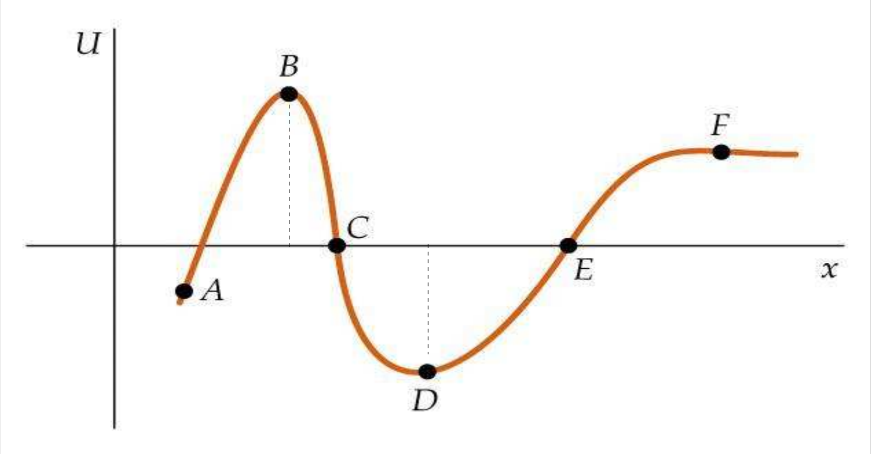
4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Ejemplo:



- X_B y X_D => puntos donde F=0
  X_B y X_D :**Puntos de equilibrio**
  X_B : **equilibrio inestable**
  X_D : **equilibrio estable**
- Si por ejemplo Ep=0 => la partícula se mueve entre X_C y X_E
  X_C y X_E : **puntos de retorno**

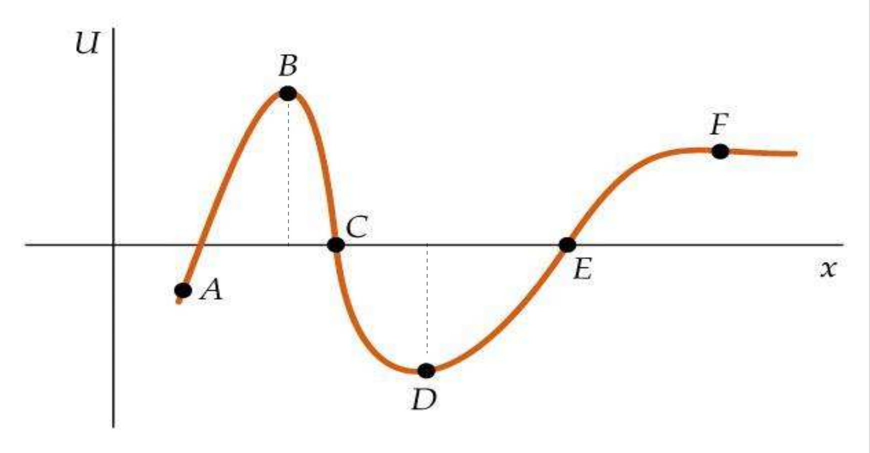
4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$F = -\frac{dE_p}{dr}$$

Ejemplo:



- X_B y X_D => puntos donde F=0

  X_B y X_D :**Puntos de equilibrio**

  X_B : **equilibrio inestable**

  X_D : **equilibrio estable**

- Si por ejemplo Ep=0 => la partícula se mueve entre X_C y X_E

  X_C y X_E : **puntos de retorno**

  La partícula tendrá máxima velocidad en X_D

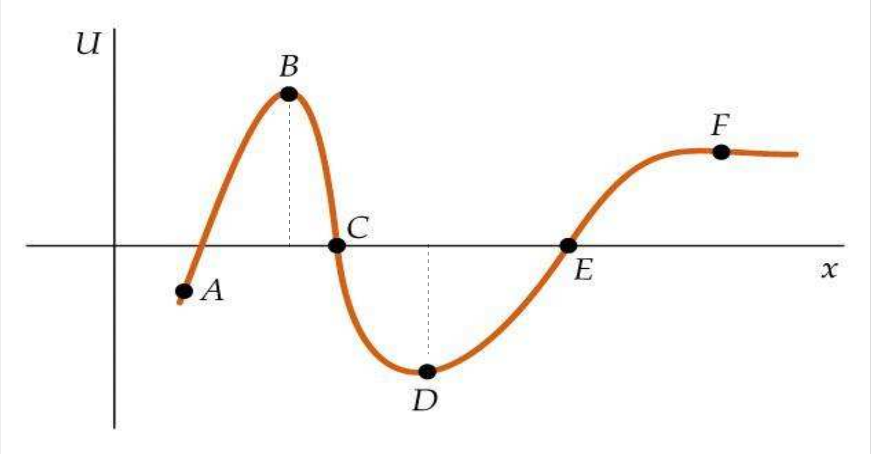
4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$F = -\frac{dE_p}{dr}$$

Ejemplo:



- X_B y X_D => puntos donde F=0
  X_B y X_D :**Puntos de equilibrio**
  X_B : **equilibrio inestable**
  X_D : **equilibrio estable**
- Si por ejemplo Ep=0 => la partícula se mueve entre X_C y X_E
  X_C y X_E : **puntos de retorno**
  La partícula tendrá máxima velocidad en X_D
- Una partícula con energía mecánica cero no puede llegar al infinito

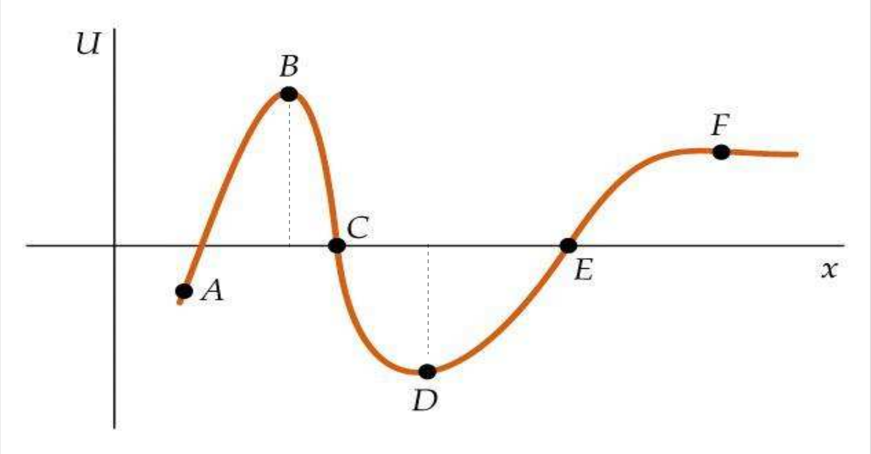
4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$F = -\frac{dE_p}{dr}$$

Ejemplo:



- X_B y X_D => puntos donde F=0

  X_B y X_D :**Puntos de equilibrio**

  X_B : **equilibrio inestable**

  X_D : **equilibrio estable**

- Si por ejemplo Ep=0 => la partícula se mueve entre X_C y X_E

  X_C y X_E : **puntos de retorno**

  La partícula tendrá máxima velocidad en X_D

- Una partícula con energía mecánica cero no puede llegar al infinito
- Si dejamos una partícula en reposo en X_B, llegará al infinito

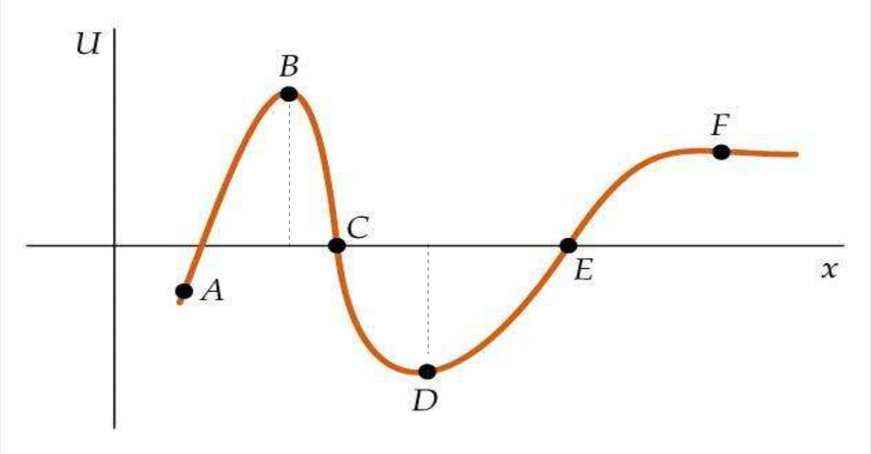
4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Discusión de curvas de Ep(x):

En el caso de una curva Ep(x) 'general' podemos deducir algunas cosas sobre el movimiento:

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Ejemplo:



- X_B y X_D => puntos donde F=0

  X_B y X_D :**Puntos de equilibrio**

  X_B : **equilibrio inestable**

  X_D : **equilibrio estable**

- Si por ejemplo Ep=0 => la partícula se mueve entre X_C y X_E

  X_C y X_E : **puntos de retorno**

  La partícula tendrá máxima velocidad en X_D

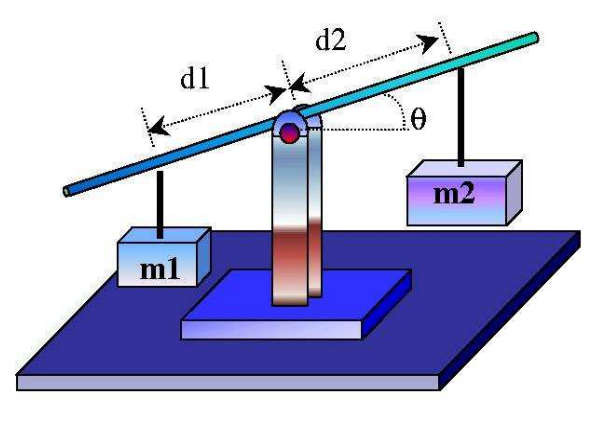
- Una partícula con energía mecánica cero no puede llegar al infinito
- Si dejamos una partícula en reposo en X_B, llegará al infinito
- ....

4.4. Discusión de curvas de energía potencial

Ejercicio 4.5: Una barra puede oscilar en un plano vertical alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos. Obtener la curva de energía potencial en función del ángulo que forma la barra con la vertical. Determinar (matemáticamente) las posiciones de equilibrio estable e inestable.

Solución: $E_p = m\,g\,\frac{L}{2}\sin(\theta), \quad \theta = 180^o, \ \theta = 0^o$

Ejercicio 4.6: Una barra recta de masa despreciable se monta sobre un pivote sin rozamiento como muestra la figura. Las masa m_1 y m_2 se suspenden a las distancias d_1 y d_2 del modo indicado. Se pide:



a) Energía potencial gravitatoria de las masas en función del ángulo θ formado por la barra y la horizontal U(θ).

b) ¿Para qué ángulo θ es mínima la energía potencial?. Discutir el resultado representando gráficamente U(θ) y obteniendo las posiciones de equilibrio del sistema.

c) Demostrar que si $m_1 d_1 = m_2 d_2$, la energía potencial es independiente de θ. (Cuando esto ocurre el sistema está equilibrado para cualquier valor de θ).

Solución:

$$U = g\sin(\theta)(m_2 d_2 - m_1 d_1)$$
$$\theta = 90^o (si\, m_2 d_2 < m_1 d_1)$$
$$\theta = 270^o (si\, m_2 d_2 < m_1 d_1)$$

Tema 2: Dinámica de la partícula.

Leccion 3. Dinámica de la partícula
Leyes de Newton

3.1. Concepto de Fuerza
3.2. Leyes de Newton
3.3. Fuerzas de rozamiento. Cono de roz.
3.4. Partícula en equilibrio estático
3.5 Movimiento interdependiente.
3.6 Sistemas de referencia inerciales y no inerciales.
3.7 Movimiento relativo a la superficie terrestre.
3.8 Cantidad de movimiento.
3.9 Momento angular.
3.10 Fuerzas centrales

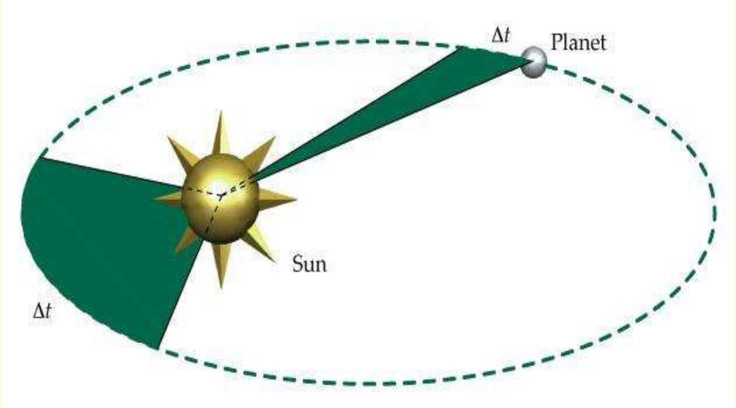
Leccion 4. Dinámica de la partícula
Trabajo y energía

4.1 Trabajo y Potencia.
4.2 Energía cinética.
4.3 Energía potencial. Fuerzas conservativas y no conservativas.
4.4 Discusión de curvas de Ep
4.5 Gravitación:
Ley de la gravitación universal
Energía potencial gravitatoria
Movimiento en un campo gravitatorio

Leyes de Kepler (Johannes Kepler, 1609-1618)

1ra ley: *Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, estando el Sol situado en uno de los focos.*

2da ley: *El radio vector que une el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.*



3ra ley: *Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor a de la órbita elíptica.*

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = cte}$$

4.5. Gravitación

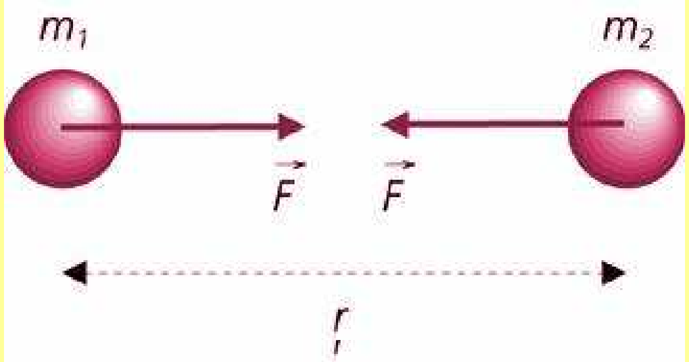
Ley de la gravitación universal (Newton, 1687)

$$F_g = G\frac{m_1\, m_2}{r^2}$$

Fuerza Atractiva Central

$$\boxed{\vec{F}_g = -G\frac{m_1\, m_2}{r^2}\,\vec{u}_r}$$

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11}\ m^2\ kg^{-1}\ s^{-1}$$



Solo es importante si alguno de los cuerpos tiene una masa muy grande (el Sol, planetas, ...)

Ejercicio 4.7: Sabiendo que el radio medio de la tierra es R_T=6371 km, estimar la masa de la tierra a partir de la aceleración de la gravedad.

Ejercicio 4.8: Determinar la distancia sobre la superficie de la tierra a la que debe situarse un satélite en **órbita geoestacionaria**. (M_T=5,97 × 10^{24} kg, R_T=6370 km).

El satélite parece quieto respecto de la superficie terrestre

Energía potencial gravitatoria

- *La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, y por lo tanto podemos obtener su función de Energía potencial.*

Siempre se toma:
$E_p(\infty)=0$

$$F_g = -G\frac{m_1\, m_2}{r^2}$$

$$F = -\frac{dE_p}{dr}$$

$$E_p(r) = \int_\infty^r dE_p = \int_\infty^r -F\cdot dr$$

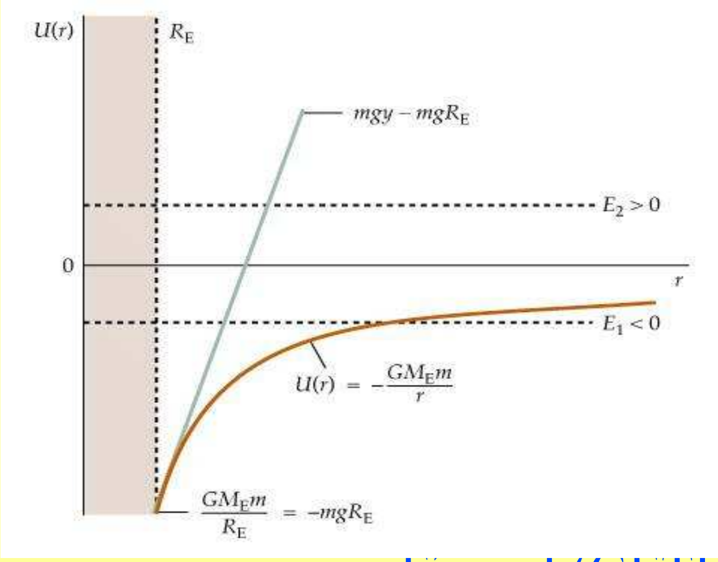
$$E_p(r) = \int_\infty^r G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Energía potencial gavitatoria

$$\boxed{E_p(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}}$$

Velocidad radial que debemos dar a un cuerpo para conseguir que 'escape' de la atracción gravitatoria.

Ejercicio: Calcular la **velocidad de escape** desde la superficie terrestre. (M_T=5,97 × 10^{24} kg, R_T=6370 km, G=6.674 × 10^{-11} m^2 kg^{-1} s^{-1})

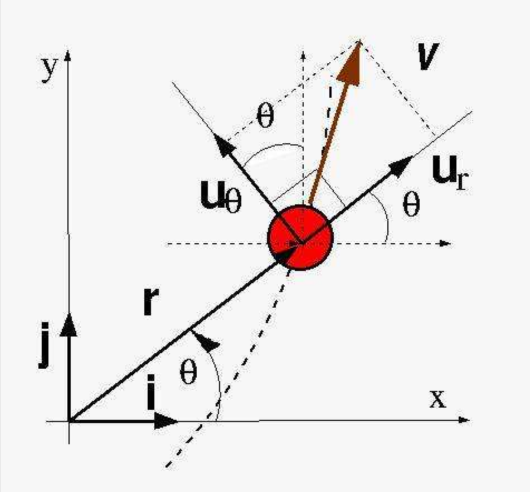


Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

Energía potencial efectiva

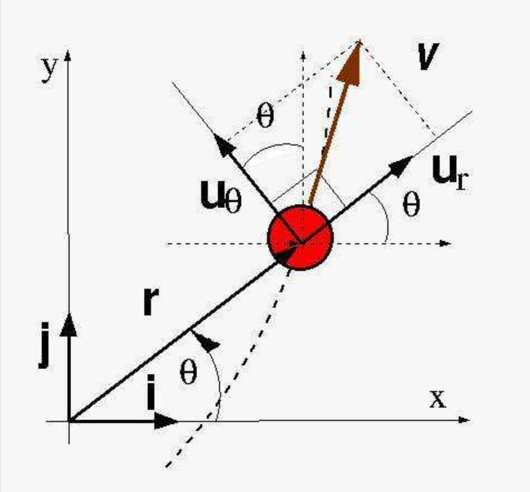
- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*



Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

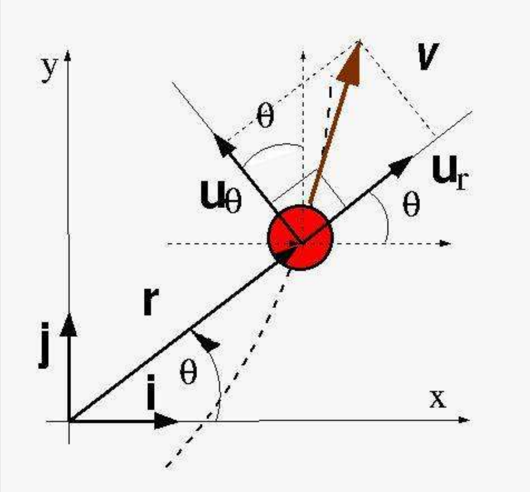
$$\boxed{E = E_p + E_C}$$



Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

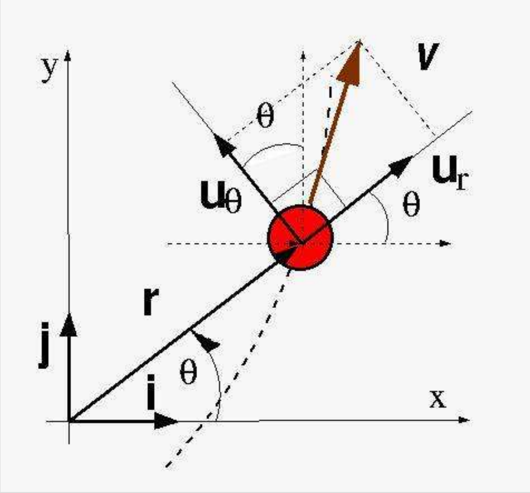
$$\boxed{E = E_p + E_C} = -G\frac{m\,M}{r} + \frac{1}{2}\,m\;v^2$$



Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

$$\boxed{E = E_p + E_C} = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\,v^2$$

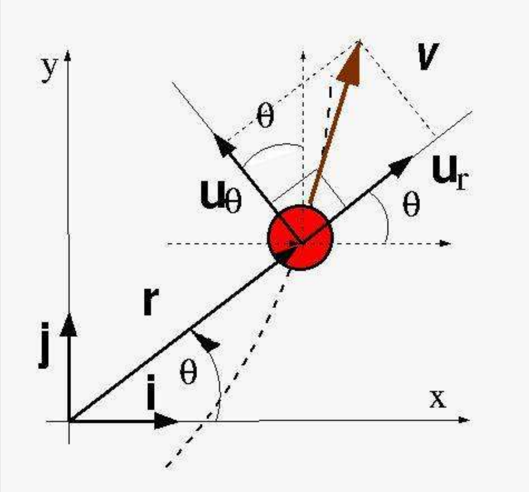


Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

$$\boxed{E = E_p + E_C} = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\, v^2$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

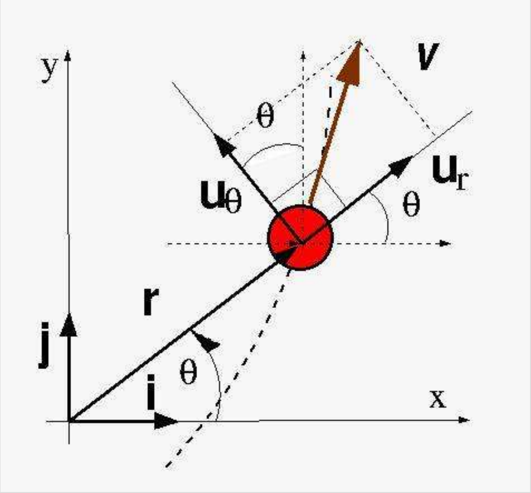


Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

$$\boxed{E = E_p + E_C} = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\,v^2$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$



$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)\cdot(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$

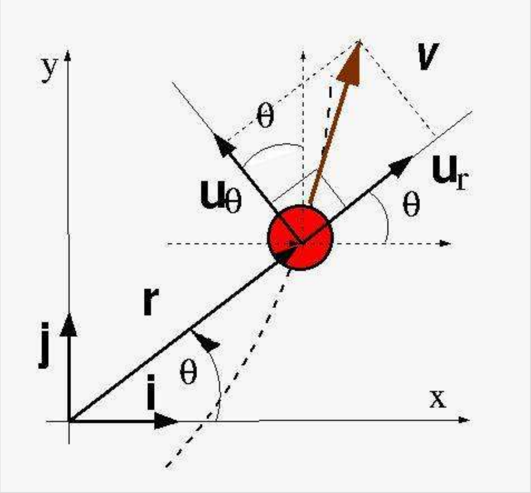
4.5. Gravitación

Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

$$\boxed{E = E_p + E_C} = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\,v^2$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$



$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)\cdot(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$

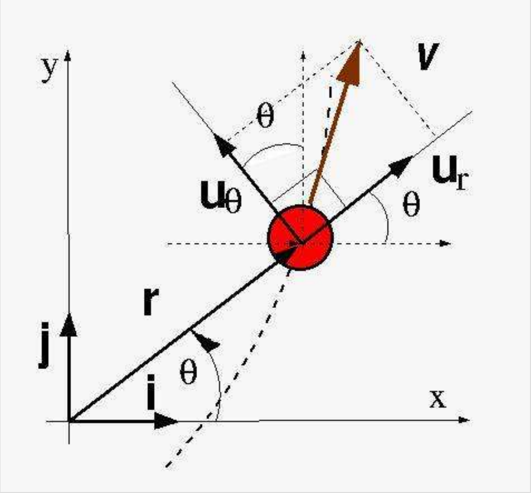
$$v^2 = \dot{r}^2\,(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r) + r^2\dot{\theta}^2\,(\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_\theta) + 2\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta}\cdot(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_\theta)$$

Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

$$\boxed{E = E_p + E_C} = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\,v^2$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$



$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)\cdot(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$

$$v^2 = \dot{r}^2\,(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r) + r^2\dot{\theta}^2\,(\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_\theta) + 2\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta}\cdot(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_\theta)$$

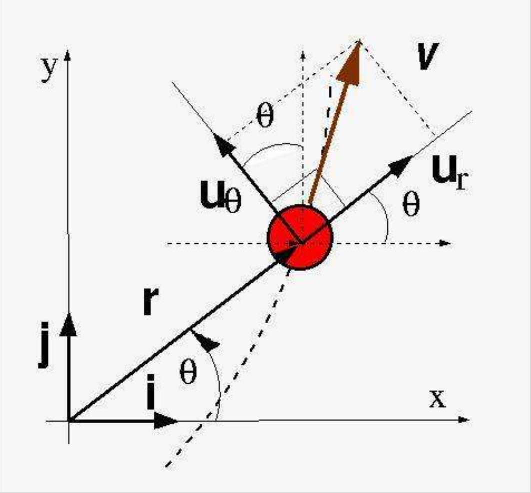
usando
$$L = m\,r^2\,\dot{\theta}$$

Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

$$\boxed{E = E_p + E_C} = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\,v^2$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$



$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)\cdot(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$

$$v^2 = \dot{r}^2\,(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r) + r^2\dot{\theta}^2\,(\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_\theta) + 2\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta}\cdot(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_\theta)$$

$$\boxed{v^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}}$$

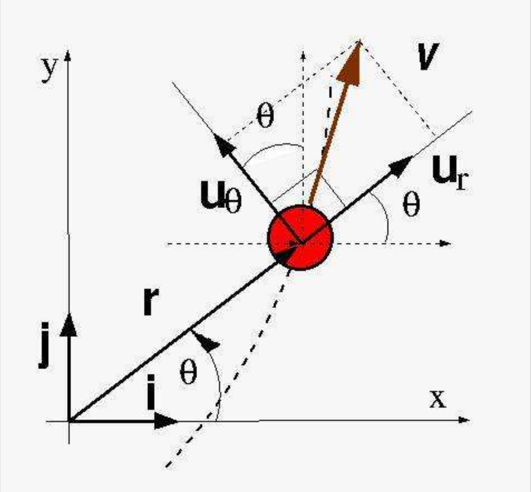
$$\boxed{\text{usando } L = m\,r^2\,\dot{\theta}}$$

Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

$$\boxed{E = E_p + E_C} = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m v^2$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$



$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)\cdot(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$

$$v^2 = \dot{r}^2\,(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r) + r^2\dot{\theta}^2\,(\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_\theta) + 2\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta}\cdot(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_\theta)$$

$$\boxed{v^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}}$$

usando $L = m r^2 \dot{\theta}$

$$E = E_p + E_C = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{m^2 r^2}$$

Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

$$\boxed{E = E_p + E_C} = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\, v^2$$

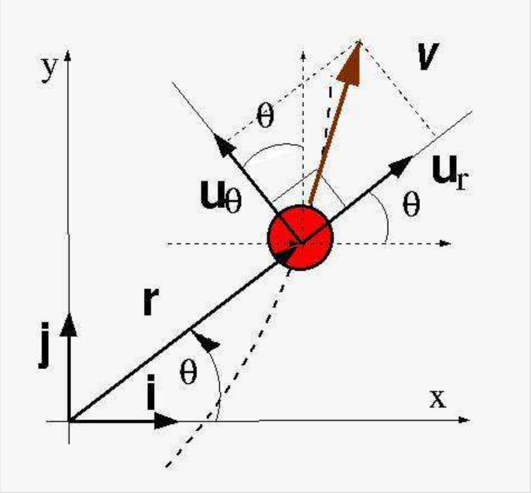
$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)\cdot(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$

$$v^2 = \dot{r}^2\,(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r) + r^2\dot{\theta}^2\,(\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_\theta) + 2\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta}\cdot(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_\theta)$$

$$\boxed{v^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}}$$

usando $\boxed{L = m r^2 \dot{\theta}}$



Son sólo función de la posición

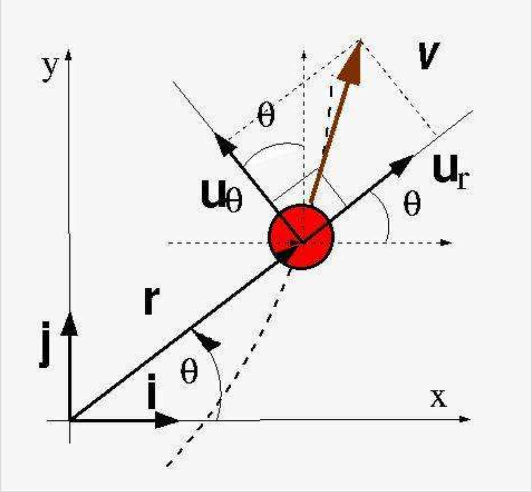
$$E = E_p + E_C = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{m^2 r^2}$$

Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

$$\boxed{E = E_p + E_C} = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\,v^2$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$



$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)\cdot(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$

$$v^2 = \dot{r}^2\,(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r) + r^2\dot{\theta}^2\,(\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_\theta) + 2\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta}\cdot(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_\theta)$$

$$\boxed{v^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{usando}\\ L = m\,r^2\,\dot{\theta}\end{array}}$$

Son sólo función de la posición

$$E = E_p + E_C = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{m^2 r^2}$$

Energía potencial efectiva

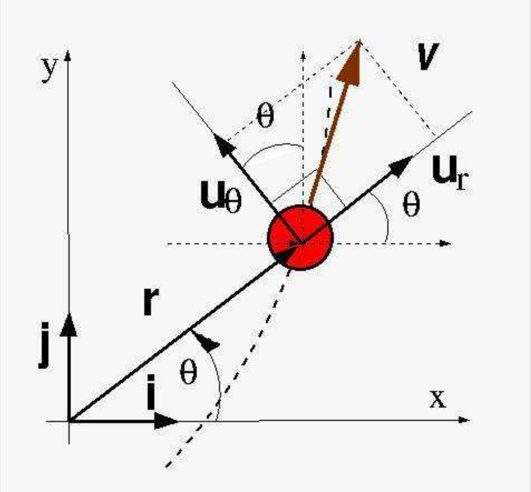
$$\boxed{E_{p\,eff}(r) = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2\,m\,r^2}}$$

Energía potencial efectiva

- *Se obtiene al expresar la energía mecánica en coord. polares planas:*

$$\boxed{E = E_p + E_C} = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\,v^2$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$



$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)\cdot(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$

$$v^2 = \dot{r}^2\,(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r) + r^2\dot{\theta}^2\,(\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_\theta) + 2\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta}\cdot(\vec{u}_r\cdot\vec{u}_\theta)$$

$$\boxed{v^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{usando}\\ L = m\,r^2\,\dot{\theta}\end{array}}$$

Son sólo función de la posición

$$E = E_p + E_C = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{m^2 r^2}$$

Energía potencial efectiva

$$\boxed{E = E_{peff}(r) + \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2}$$

$$\boxed{E_{peff}(r) = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2\,m\,r^2}}$$

4.5. Gravitación

Energía potencial efectiva

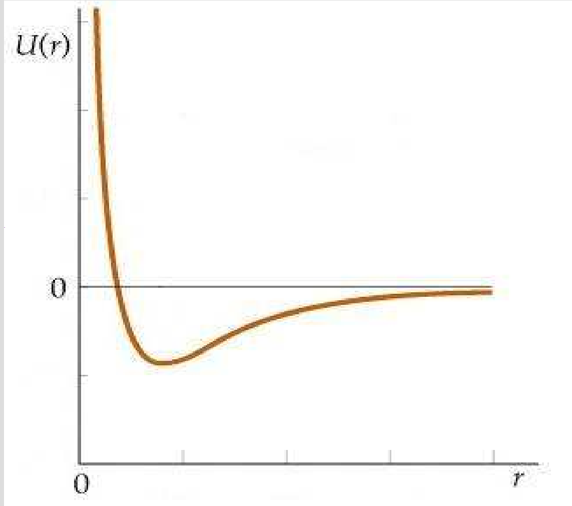
$$E_{peff}(r) = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$E = E_{peff}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

Energía potencial efectiva

$$E_{peff}(r) = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

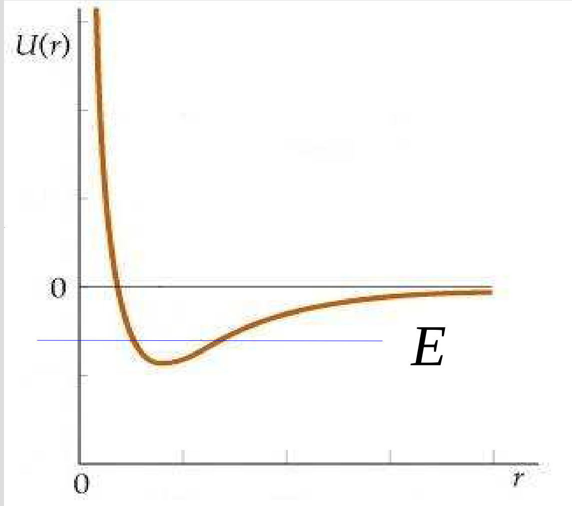
$$E = E_{peff}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$



Energía potencial efectiva

$$E_{peff}(r) = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

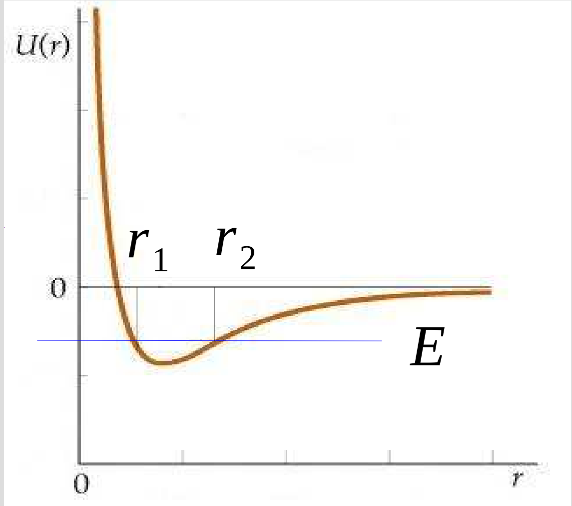
$$E = E_{peff}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$



Energía potencial efectiva

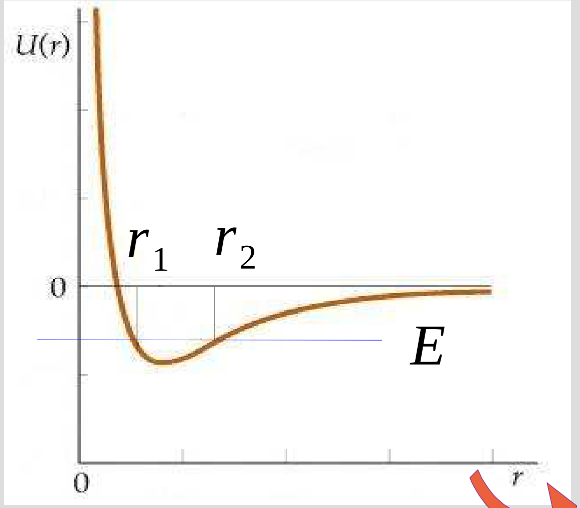
$$E_{peff}(r) = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

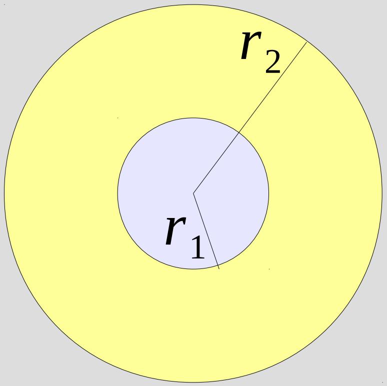
$$E = E_{peff}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$



Energía potencial efectiva

$$\boxed{\begin{aligned} E_{peff}(r) &= -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \\ E &= E_{peff}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \end{aligned}}$$





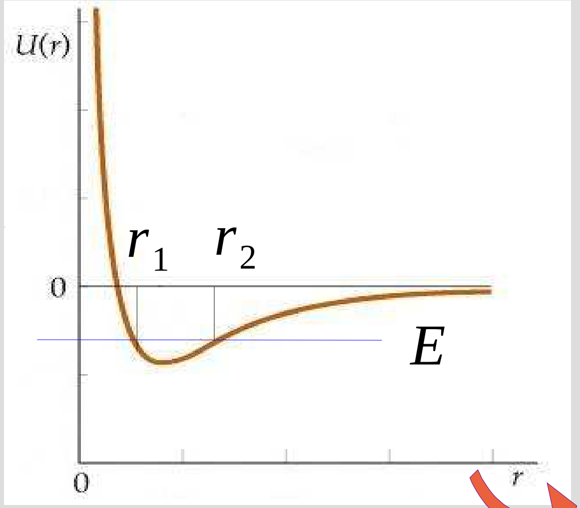
Para una E dada, el movimiento está limitado entre r_1 y r_2

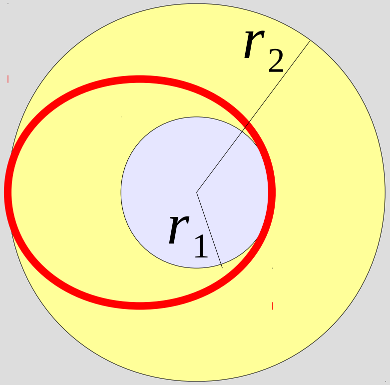
$(\dot{r}\ \text{se hace cero})$

Energía potencial efectiva

$$E_{peff}(r) = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$E = E_{peff}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$





Para una E dada, el movimiento está limitado entre r_1 y r_2

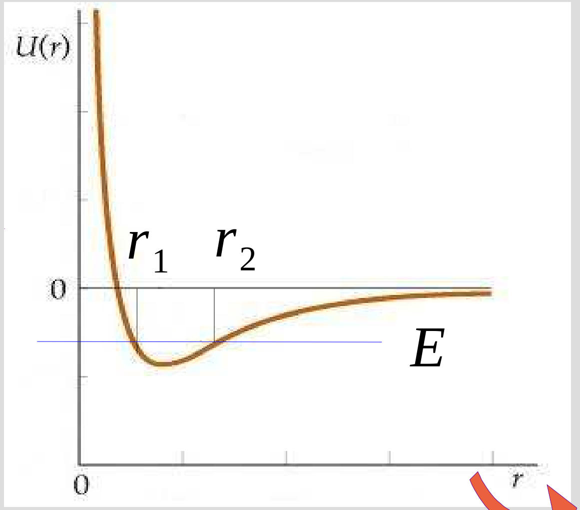
$(\dot{r}\text{ se hace cero})$

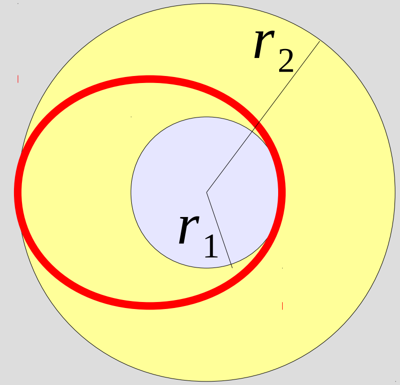
4.5. Gravitación

Energía potencial efectiva

$$E_{peff}(r) = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$E = E_{peff}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$





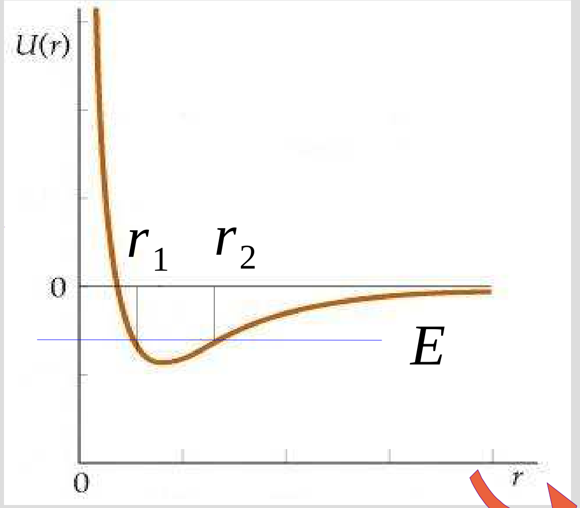
Para una E dada, el movimiento está limitado entre r_1 y r_2
$(\dot{r}$ se hace cero$)$

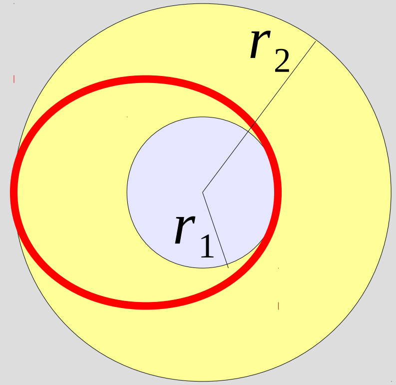
Movimiento en un campo gravitatorio

4.5. Gravitación

Energía potencial efectiva

$$\boxed{\begin{array}{l} E_{peff}(r) = -G\dfrac{mM}{r} + \dfrac{L^2}{2mr^2} \\[2ex] E = E_{peff}(r) + \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 \end{array}}$$

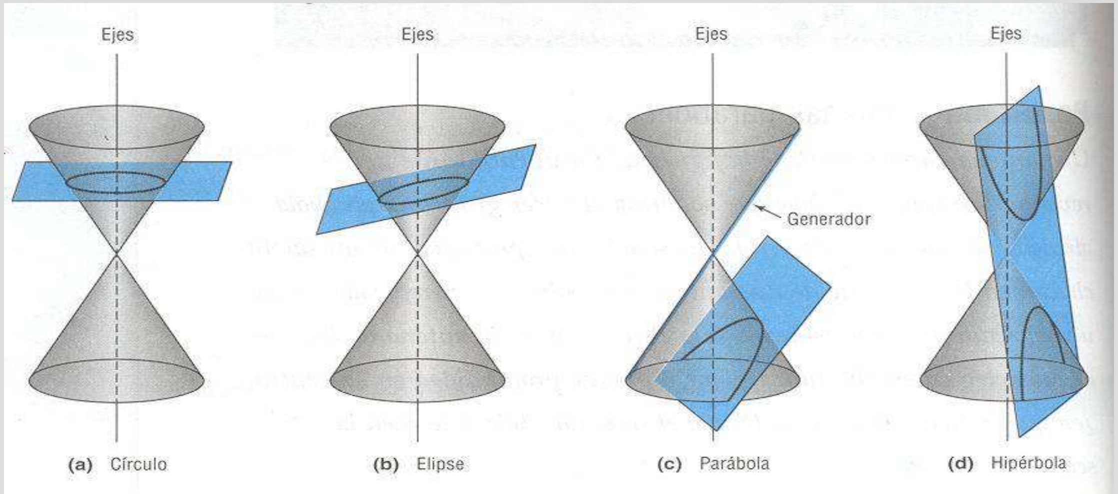




Para una E dada, el movimiento está limitado entre r_1 y r_2

$(\dot{r}\ \text{se hace cero})$

Movimiento en un campo gravitatorio

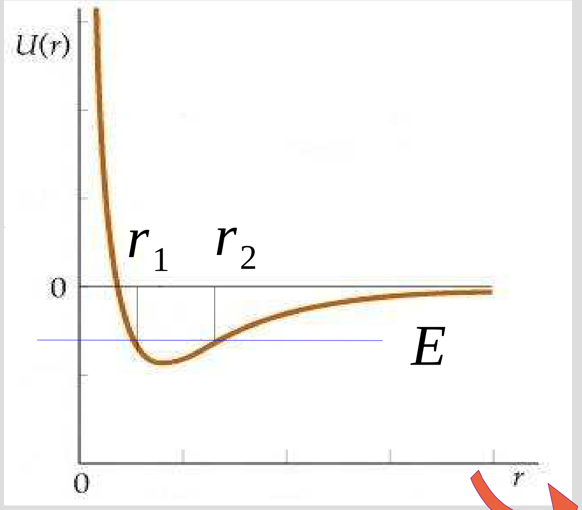


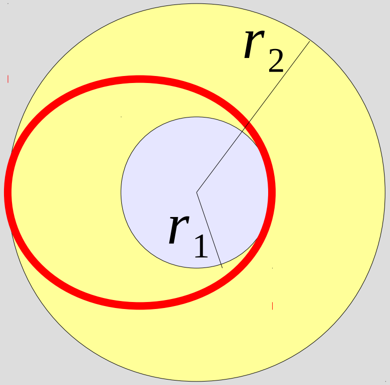
4.5. Gravitación

Energía potencial efectiva

$$E_{peff}(r) = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$E = E_{peff}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

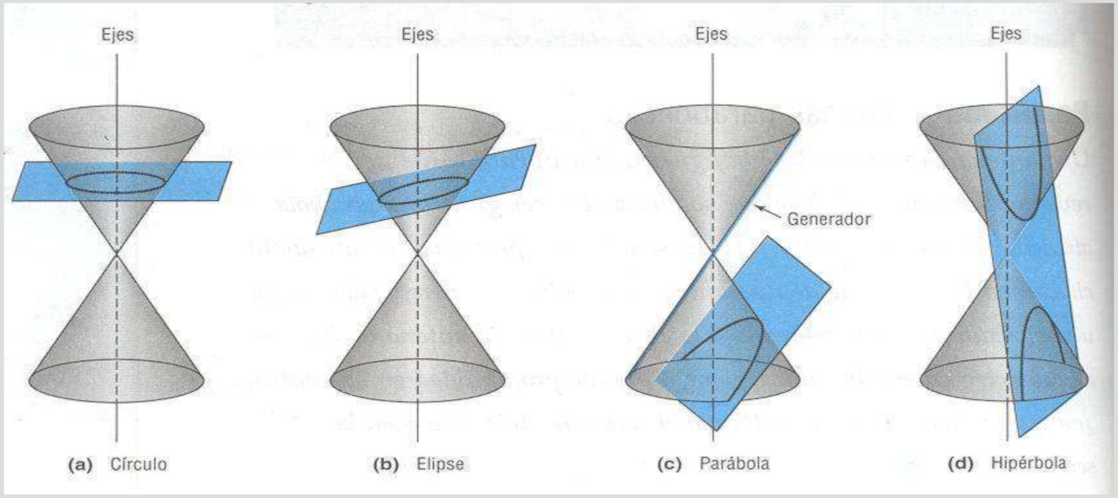




Para una E dada, el movimiento está limitado entre r_1 y r_2

$(\dot{r}$ *se hace cero*$)$

Movimiento en un campo gravitatorio



Las trayectorias posibles son las 'cónicas'

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon\cos(\theta - \theta_0)}$$

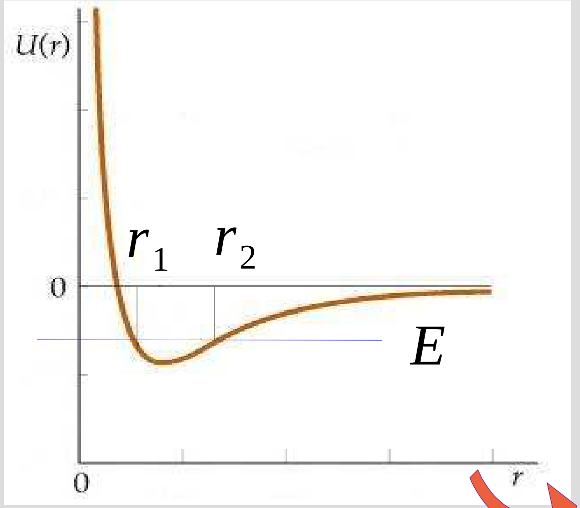
ϵ: *excentricidad*

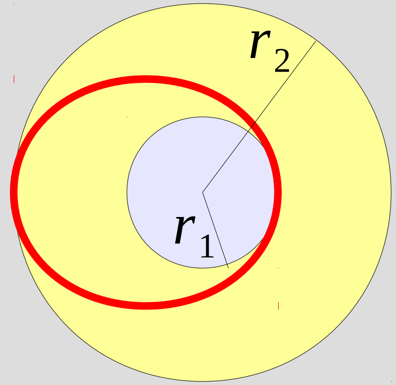
4.5. Gravitación

Energía potencial efectiva

$$E_{peff}(r) = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$E = E_{peff}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

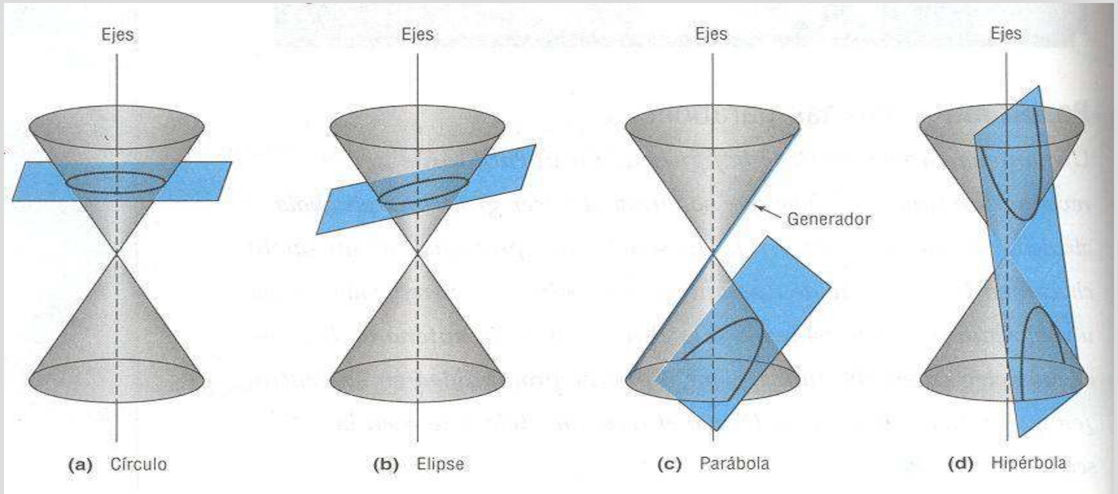




Para una E dada, el movimiento está limitado entre r_1 y r_2

$(\dot{r}$ se hace cero$)$

Movimiento en un campo gravitatorio



Las trayectorias posibles son las 'cónicas'

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

ϵ : *excentricidad*

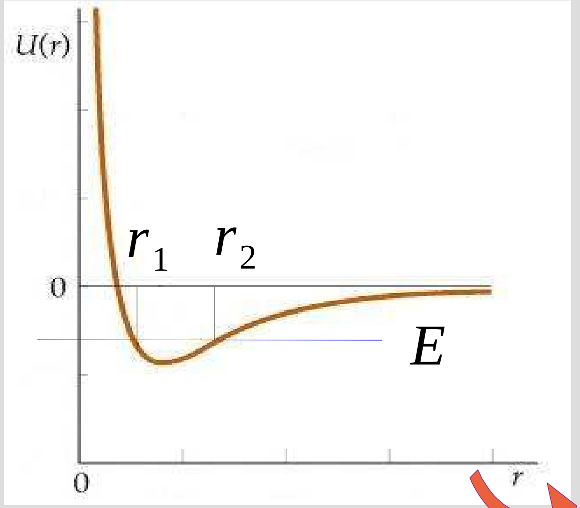
Se obtiene resolviendo la 2ᵈᵃ Ley de Newton en coord. polares

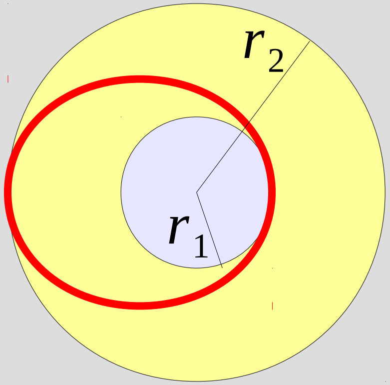
4.5. Gravitación

Energía potencial efectiva

$$E_{peff}(r) = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$E = E_{peff}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

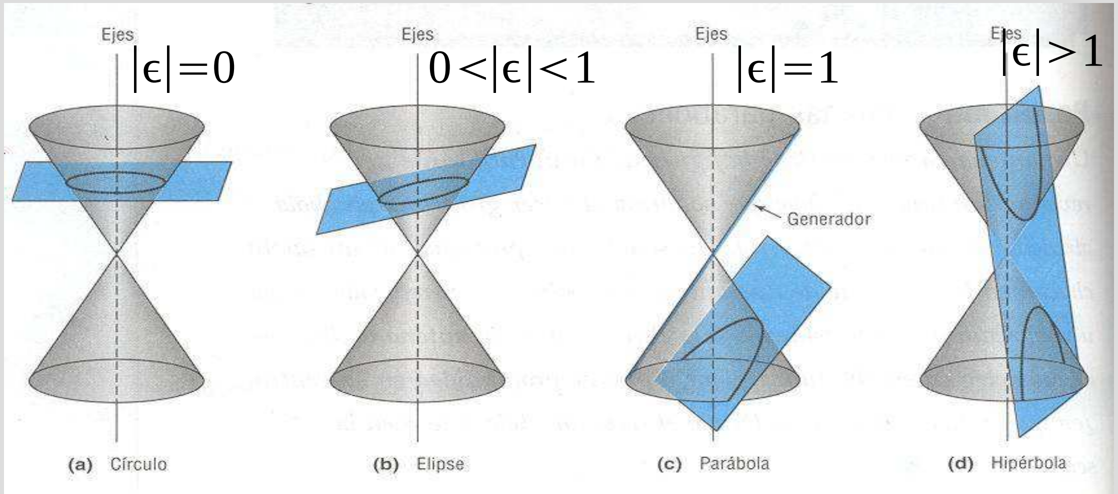




Para una E dada, el movimiento está limitado entre r_1 y r_2

$(\dot{r}$ se hace cero$)$

Movimiento en un campo gravitatorio



Las trayectorias posibles son las 'cónicas'

$$r = \frac{\alpha}{1+\epsilon\cos(\theta-\theta_0)}$$

ϵ : *excentricidad*

Se obtiene resolviendo la 2da Ley de Newton en coord. polares

4.5. Gravitación

Ejercicio 4.9: Un satélite puede girar alrededor de la Luna (radio 1700 km) muy próximo a su superficie con velocidad v. Si lanzáramos un proyectil verticalmente hacia arriba desde su superficie con la misma velocidad inicial v, ¿qué altura alcanzaría?.

Solución: h=1700 km

Ejercicio 4.10: En un sistema de estrellas binarias, dos estrellas orbitan alrededor de su centro común de masa. Si las estrellas tienen masas m_1 y m_2 y están separadas por una distancia r, demostrar que el periodo de rotación está relacionado con r según la expresión:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} r^3$$

Cuestiones (contesta razonadamente).

1.El trabajo realizado por una fuerza no conservativa es siempre negativo.

2. El trabajo de una fuerza conservativa al desplazarse entre dos puntos es menor si se realiza a través de la recta que los une (trayectoria más corta).

3. En una trayectoria cerrada el trabajo realizado por una fuerza conservativa es nulo.

4. Suficientemente cerca de un mínimo de energía potencial, el movimiento de una partícula es periódico (se va repitiendo continuamente).

5. Una partícula sobre la que actúa una fuerza conservativa se encuentra en una situación de equilibrio estable. En estas condiciones la segunda derivada de la energía potencial respecto de la posición es negativa.

6. Si la energía cinética de una partícula es constante, podemos afirmar que la suma de fuerzas que actúan sobre ésta es nula.

7. La energía cinética de una partícula es la misma medida respecto de cualquier sistema de referencia inercial.

Cuestiones (contesta razonadamente).

8. Un objeto sometido únicamente a una fuerza central describe siempre una trayectoria plana.

8. Una fuerza conservativa siempre es central.

9. La fuerza que hace la Tierra sobre la Luna es mayor que la que hace la Luna sobre la Tierra porque la masa de la Tierra es mayor que la masa de la Luna.

10. La energía potencial gravitatoria es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre los cuerpos.

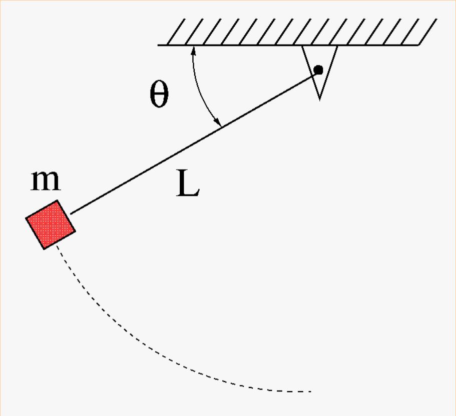
11. Una partícula sometida a una fuerza centrípeta realiza un movimiento circular uniforme. La potencia desarrollada por la fuerza es proporcional al módulo de la velocidad de la partícula.

12. La energía potencial gravitatoria es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre los cuerpos.

13. La segunda ley de Kepler sólo es aplicable al movimiento debido a las fuerzas gravitatorias.

Leccion 4. Dinámica. Trabajo y energía

Problema: Un péndulo está formado per una partícula de masa m unida a una cuerda de longitud L. Si desplazamos la partícula de manera que la la cuerda queda horizontal y dejamos que se inicie el movimiento sin velocidad inicial, calcular:



a) Determina la velocidad de la masa m cuando la cuerda forma un ángulo θ con la horizontal (4p)

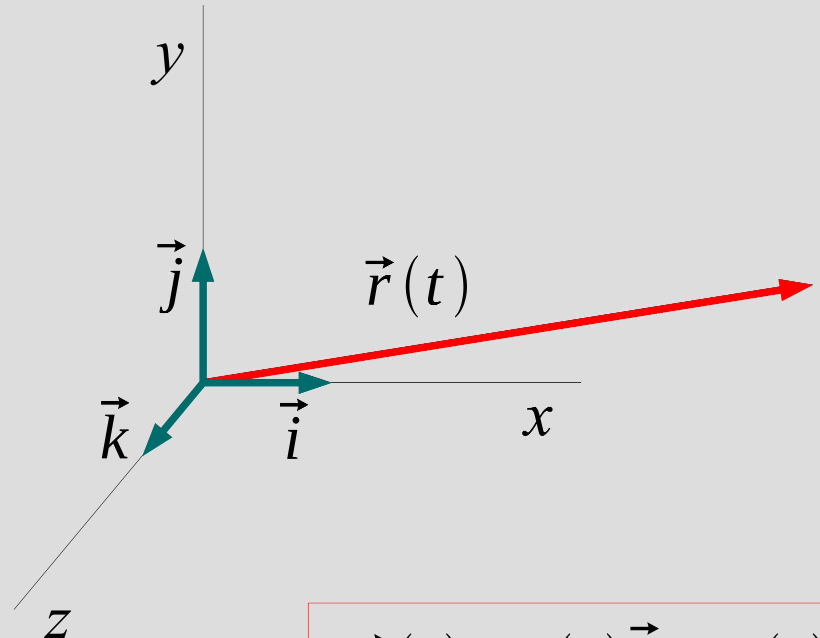
b) Si la tensión máxima que puede soportar la cuerda es T_m, cuál es el valor máximo de la masa, m_{max}, que podemos utilizar sin que se rompa la cuerda (3p)

c) Si la masa m tuviera un valor de $2m_{max}$, ¿qué ángulo θ formará la cuerda en el momento de romperse? (3p)

5.1. Conceptos básicos

Vector velocidad

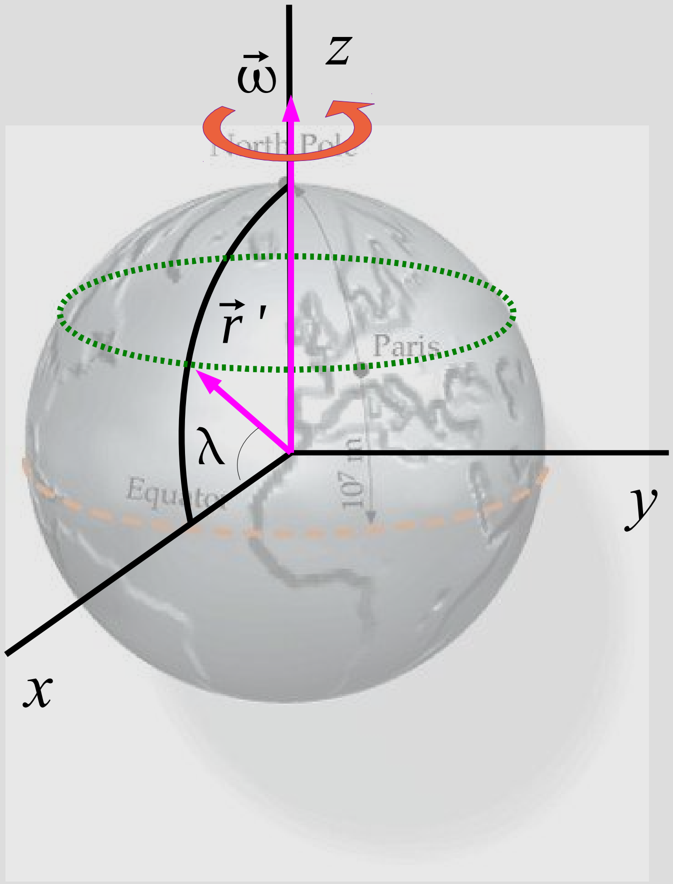
- La velocidad nos indica cómo cambia la posición de la partícula dividido entre en el tiempo empleado
- **En una dimensión:**



$$\boxed{\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}}$$

8.4. Movimiento relativo a la superficie terrestre.

Ejercicio:



Solución:

θ=39.22º

L=79cm