

# OSCILACIONES, ONDAS Y TERMODINÁMICA

## MÓDULO 1: OSCILACIONES

Figuras cedidas en parte por W.H. Freeman/Worth, que pertenecen al libro “Física, 4a. Ed.”, P.A. Tipler, Ed. Reverté

# Módulo 1: Oscilaciones

## Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

- 1.1 Cinemática del MAS.
- 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
- 1.3 Ejemplos de MAS.  
(masa-muelle, péndulos, sistemas de muelles, ...)
- 1.4 Energía potencial elástica.
- 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
- 1.6 Método de la conservación de E.

## Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

- 2.1 Fuerza de fricción viscosa.
- 2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
- 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
- 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.
- 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

## Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

- 3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
- 3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
- 3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
- 3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
- 3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
- 3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

## Lección 4. Superposición de varios MAS

- 4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
- 4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
- 4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
- 4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

# Módulo 1: Oscilaciones

## Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

- 1.1 Cinemática del MAS.
- 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
- 1.3 Ejemplos de MAS.  
(masa-muelle, péndulos, sistemas de muelles, ...)
- 1.4 Energía potencial elástica.
- 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
- 1.6 Método de la conservación de E.

## Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

- 2.1 Fuerza de fricción viscosa.
- 2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
- 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
- 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.
- 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

## Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

- 3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
- 3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
- 3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
- 3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
- 3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
- 3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

## Lección 4. Superposición de varios MAS

- 4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
- 4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
- 4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
- 4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

## Lección 2: Oscilaciones Amortiguadas

- El MAS es una idealización => No existe !
- En la naturaleza siempre hay fuerzas disipativas que producen el amortiguamiento de las oscilaciones.

## Lección 2: Oscilaciones Amortiguadas

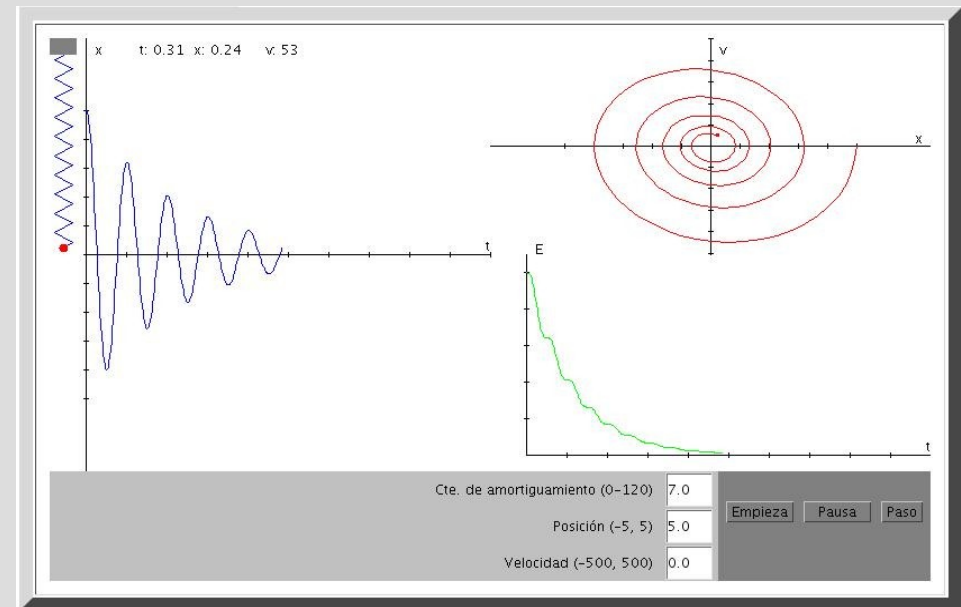
- El MAS es una idealización  $\Rightarrow$  No existe !
- En la naturaleza siempre hay fuerzas disipativas que producen el amortiguamiento de las oscilaciones.



<http://www.youtube.com/watch?v=BRbCW2MsL94>

## Lección 2: Oscilaciones Amortiguadas

- El MAS es una idealización  $\Rightarrow$  No existe !
- En la naturaleza siempre hay fuerzas disipativas que producen el amortiguamiento de las oscilaciones.

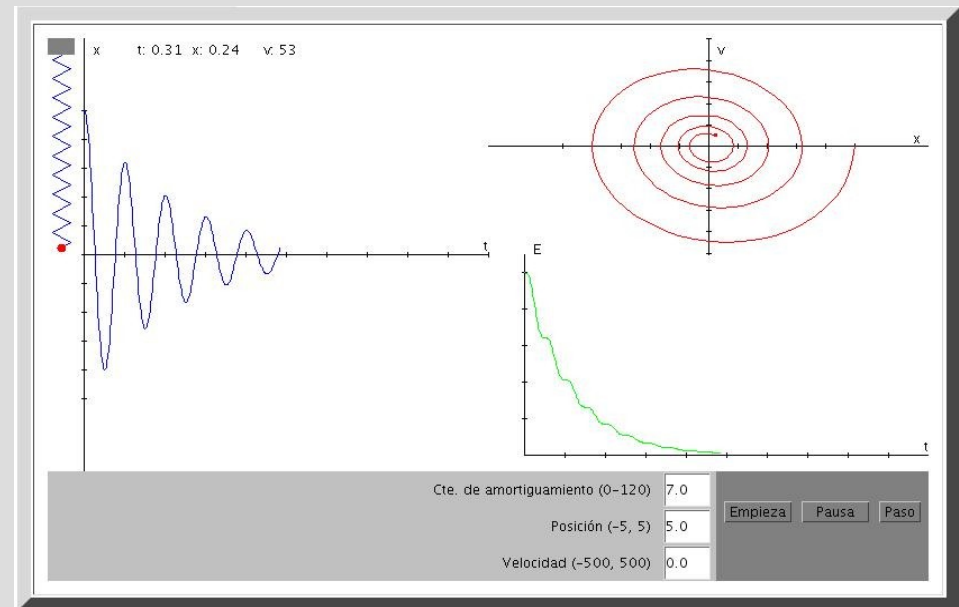


<http://www.youtube.com/watch?v=BRbCW2MsL94>

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/>

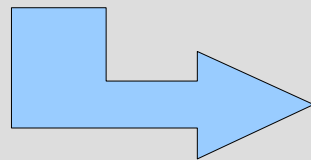
## Lección 2: Oscilaciones Amortiguadas

- El MAS es una idealización  $\Rightarrow$  No existe !
- En la naturaleza siempre hay fuerzas disipativas que producen el amortiguamiento de las oscilaciones.



<http://www.youtube.com/watch?v=BRbCW2MsL94>

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/>



**Objetivo:** encontrar las ecuaciones que rigen las oscilaciones amortiguadas

## 2.1 Fuerza de rozamiento viscosa.

Si un cuerpo se mueve en un fluido (a poca velocidad) aparece una fuerza de rozamiento:

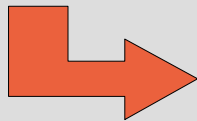


## 2.1 Fuerza de rozamiento viscosa.

Si un cuerpo se mueve en un fluido (a poca velocidad) aparece una fuerza de rozamiento: *proporcional y opuesta a su velocidad*

## 2.1 Fuerza de rozamiento viscosa.

Si un cuerpo se mueve en un fluido (a poca velocidad) aparece una fuerza de rozamiento: *proporcional y opuesta a su velocidad*

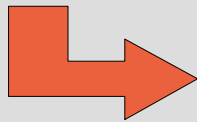


$$F_r = - b v$$

**Rozamiento  
viscoso**

## 2.1 Fuerza de rozamiento viscosa.

Si un cuerpo se mueve en un fluido (a poca velocidad) aparece una fuerza de rozamiento: *proporcional y opuesta a su velocidad*



$$F_r = -b v$$

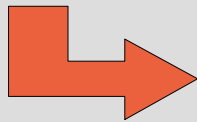
*Constante de amorguamiento*

**Rozamiento  
viscoso**

El movimiento resultante es una velocidad que decrece exponencialmente en el tiempo.

## 2.1 Fuerza de rozamiento viscosa.

Si un cuerpo se mueve en un fluido (a poca velocidad) aparece una fuerza de rozamiento: *proporcional y opuesta a su velocidad*



$$F_r = -b v$$

*Constante de amorguamiento*

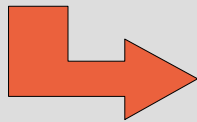
**Rozamiento  
viscoso**

El movimiento resultante es una velocidad que decrece exponencialmente en el tiempo.

$$F_r = -b v = m \frac{dv}{dt}$$

## 2.1 Fuerza de rozamiento viscosa.

Si un cuerpo se mueve en un fluido (a poca velocidad) aparece una fuerza de rozamiento: *proporcional y opuesta a su velocidad*



$$F_r = -b v$$

*Constante de amorguamiento*

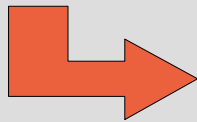
**Rozamiento  
viscoso**

El movimiento resultante es una velocidad que decrece exponencialmente en el tiempo.

$$F_r = -b v = m \frac{dv}{dt} \quad \longrightarrow \quad -\frac{b}{m} dt = \frac{dv}{v}$$

## 2.1 Fuerza de rozamiento viscosa.

Si un cuerpo se mueve en un fluido (a poca velocidad) aparece una fuerza de rozamiento: *proporcional y opuesta a su velocidad*



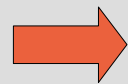
$$F_r = -b v$$

Constante de amorguamiento

**Rozamiento viscoso**

El movimiento resultante es una velocidad que decrece exponencialmente en el tiempo.

$$F_r = -b v = m \frac{dv}{dt}$$



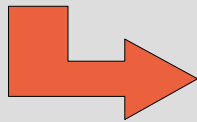
$$-\frac{b}{m} dt = \frac{dv}{v}$$

$$-\frac{b}{m} \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$



## 2.1 Fuerza de rozamiento viscosa.

Si un cuerpo se mueve en un fluido (a poca velocidad) aparece una fuerza de rozamiento: *proporcional y opuesta a su velocidad*



$$F_r = -b v$$

**Rozamiento viscoso**

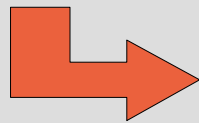
*Constante de amorguamiento*

El movimiento resultante es una velocidad que decrece exponencialmente en el tiempo.

$$F_r = -b v = m \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{m} dt = \frac{dv}{v}$$
$$-\frac{b}{m} t = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \quad \leftarrow \quad -\frac{b}{m} \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$

## 2.1 Fuerza de rozamiento viscosa.

Si un cuerpo se mueve en un fluido (a poca velocidad) aparece una fuerza de rozamiento: *proporcional y opuesta a su velocidad*



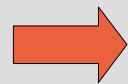
$$F_r = -b v$$

Constante de amortiguamiento

**Rozamiento viscoso**

El movimiento resultante es una velocidad que decrece exponencialmente en el tiempo.

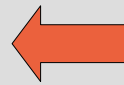
$$F_r = -b v = m \frac{dv}{dt}$$



$$-\frac{b}{m} dt = \frac{dv}{v}$$



$$-\frac{b}{m} t = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$$



$$-\frac{b}{m} \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$




$$v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m} t}$$

**Velocidad**



## 2.1 Fuerza de rozamiento viscosa.

Si un cuerpo se mueve en un fluido (a poca velocidad) aparece una fuerza de rozamiento: *proporcional y opuesta a su velocidad*



$F_r = -b v$

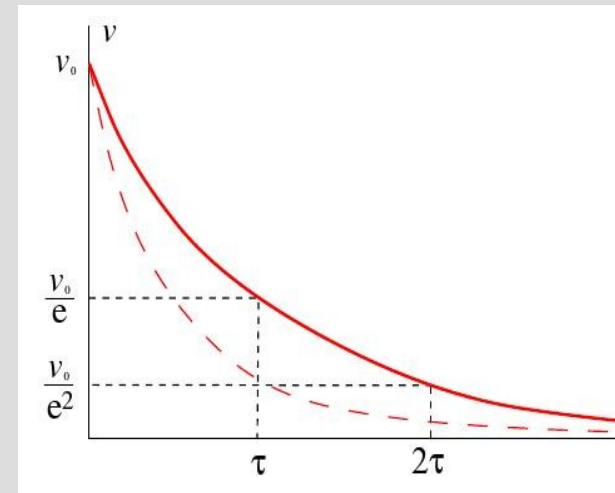
Constante de amortiguamiento

**Rozamiento viscoso**

El movimiento resultante es una velocidad que decrece exponencialmente en el tiempo.

$$F_r = -b v = m \frac{dv}{dt} \quad \longrightarrow \quad -\frac{b}{m} dt = \frac{dv}{v}$$
$$-\frac{b}{m} t = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \quad \longleftarrow \quad -\frac{b}{m} \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$

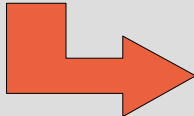
$$v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m} t}$$



**Velocidad**

## 2.1 Fuerza de rozamiento viscosa.

Si un cuerpo se mueve en un fluido (a poca velocidad) aparece una fuerza de rozamiento: *proporcional y opuesta a su velocidad*

  $F_r = -b v$  **Rozamiento viscoso**

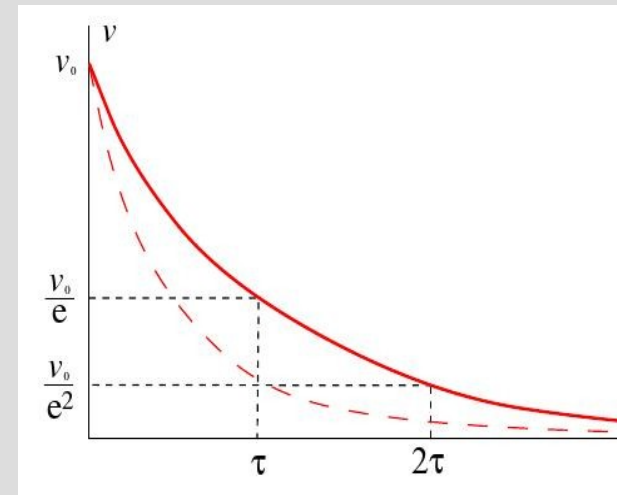
*Constante de amortiguamiento*

El movimiento resultante es una velocidad que decrece exponencialmente en el tiempo.

$$F_r = -b v = m \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{m} dt = \frac{dv}{v}$$

$$-\frac{b}{m} t = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \quad \leftarrow \quad -\frac{b}{m} \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m} t} \quad \Rightarrow \quad E_C = \frac{1}{2} m v^2 \approx E_0 e^{-\frac{2b}{m} t}$$




**Velocidad**

**Energía**

## 2.1 Fuerza de rozamiento viscosa.

Si un cuerpo se mueve en un fluido (a poca velocidad) aparece una fuerza de rozamiento: *proporcional y opuesta a su velocidad*



$F_r = -b v$

Constante de amortiguamiento

**Rozamiento viscoso**

El movimiento resultante es una velocidad que decrece exponencialmente en el tiempo.

$$F_r = -b v = m \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{m} dt = \frac{dv}{v}$$

$$-\frac{b}{m} t = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \quad \leftarrow \quad -\frac{b}{m} \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$

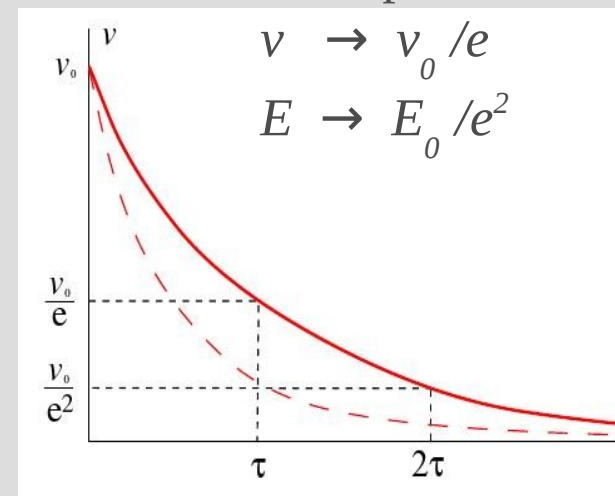
$$v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m} t}$$

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 \approx E_0 e^{-\frac{2b}{m} t}$$

**Velocidad**

**Energía**

Para un tiempo  $\tau = m/b$  :



## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

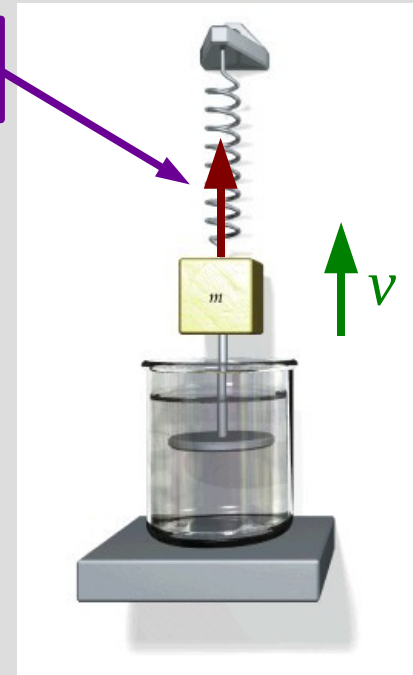
Supongamos ahora un cuerpo sometido a una fuerza elástica y a una fuerza de rozamiento viscosa:



## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

Supongamos ahora un cuerpo sometido a una fuerza elástica y a una fuerza de rozamiento viscosa:

$$F_{el} = -k x$$

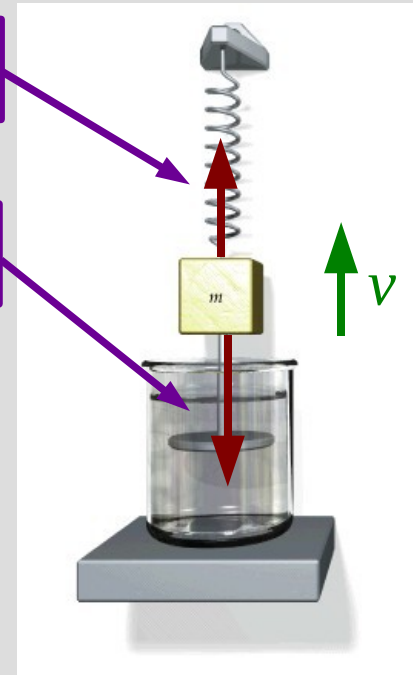


## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

Supongamos ahora un cuerpo sometido a una fuerza elástica y a una fuerza de rozamiento viscosa:

$$F_{el} = -k x$$

$$F_r = -b v$$



## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

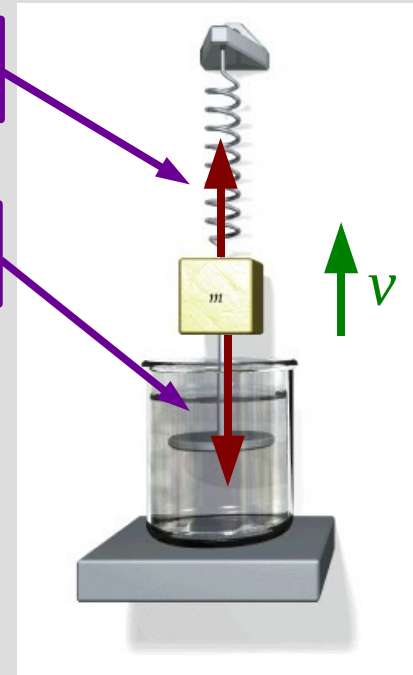
Supongamos ahora un cuerpo sometido a una fuerza elástica y a una fuerza de rozamiento viscosa:

La 2<sup>da</sup> ley de Newton queda:

$$\sum F = -k x - b \dot{x} = m \ddot{x}$$

$$F_{el} = -k x$$

$$F_r = -b v$$




## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

Supongamos ahora un cuerpo sometido a una fuerza elástica y a una fuerza de rozamiento viscosa:

La 2<sup>da</sup> ley de Newton queda:

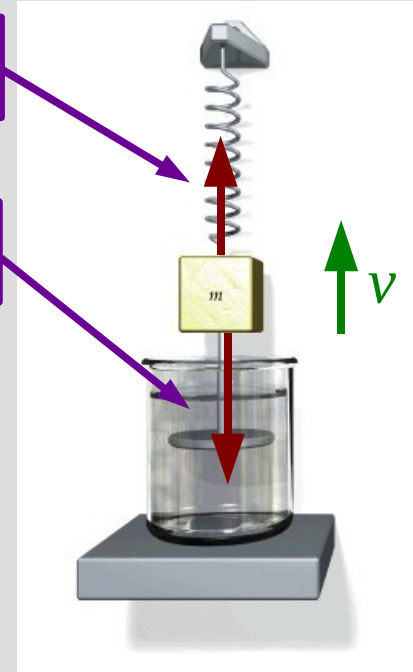
$$\sum F = -k x - b \dot{x} = m \ddot{x}$$


$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

*Es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, a coeficientes constantes y homogénea.*

$$F_{el} = -k x$$

$$F_r = -b v$$





## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

Supongamos ahora un cuerpo sometido a una fuerza elástica y a una fuerza de rozamiento viscosa:

$$F_{el} = -k x$$

$$F_r = -b v$$

La 2<sup>da</sup> ley de Newton queda:

$$\sum F = -k x - b \dot{x} = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

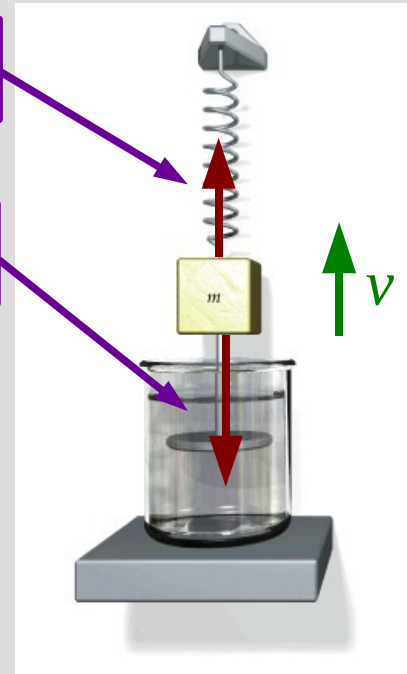
$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

**Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas**

*Es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, a coeficientes constantes y homogénea.*

Donde:

$\beta = b/2m$  es el *parámetro de amortiguamiento*  
 $\omega_0^2 = k/m$  es la *frecuencia angular natural del oscilador al cuadrado*.



## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Debe encontrarse entre estos casos extremos:

**Si  $\beta=0$ :**

**Si  $\omega_0=0$ :**

## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.


Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Debe encontrarse entre estos casos extremos:

**Si  $\beta=0$ :**


$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

**Si  $\omega_0=0$ :**

## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

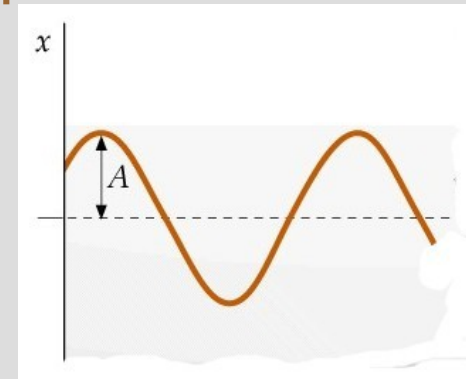
$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Debe encontrarse entre estos casos extremos:

Si  $\beta=0$ : la solución es el MAS.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Si  $\omega_0=0$ :



## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

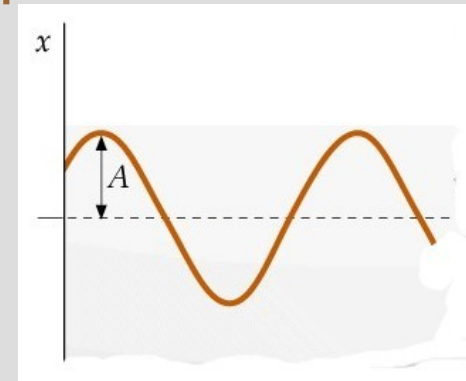
Debe encontrarse entre estos casos extremos:

**Si  $\beta=0$ :** la solución es el MAS.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

**Si  $\omega_0=0$ :**

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} = 0$$



## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

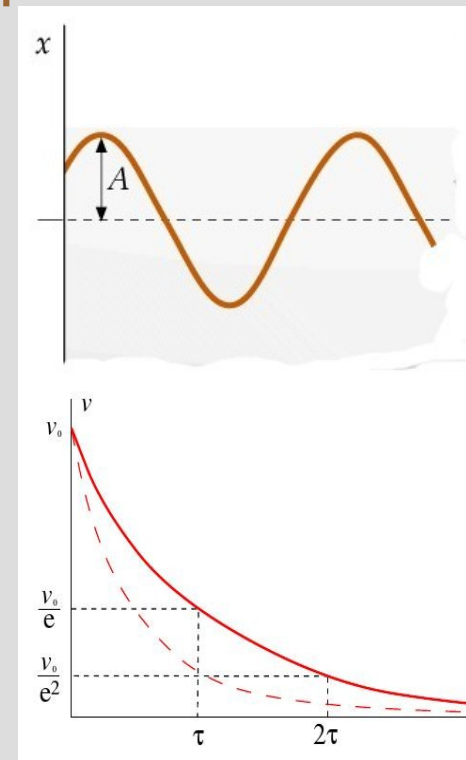
Debe encontrarse entre estos casos extremos:

Si  $\beta=0$ : la solución es el MAS.

$\hookrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

Si  $\omega_0=0$ : la velocidad decae exponencialmente.

$\hookrightarrow \ddot{x} + 2\beta \dot{x} = 0 \quad \longrightarrow \quad v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$



## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Debe encontrarse entre estos casos extremos:

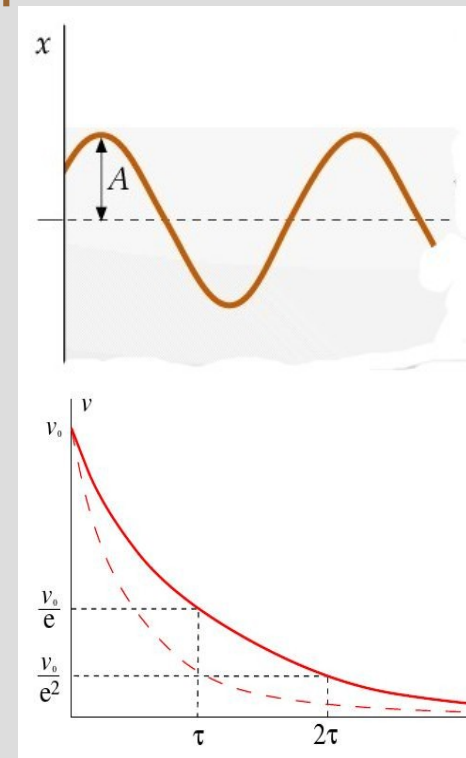
Si  $\beta=0$ : la solución es el MAS.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Si  $\omega_0=0$ : la velocidad decae exponencialmente.

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} = 0 \quad \longrightarrow \quad v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

*Parece razonable que la solución sea una combinación de ambas*



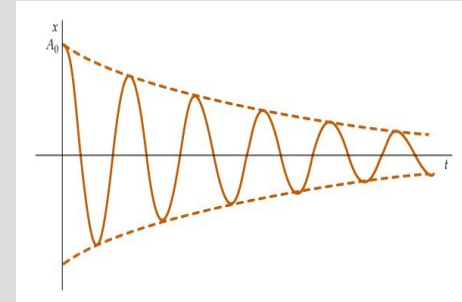


## 2.2 Ec. diferencial de las oscilaciones amortiguadas.

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

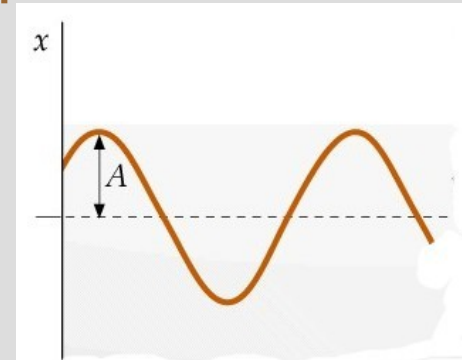
$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



Debe encontrarse entre estos casos extremos:

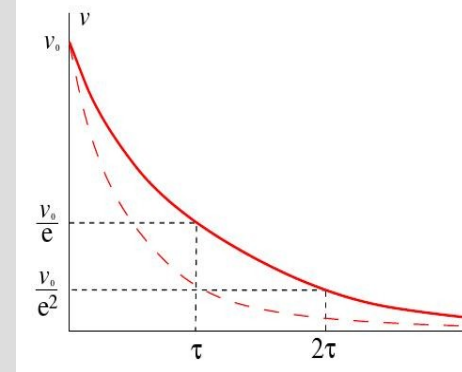
Si  $\beta=0$ : la solución es el MAS.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$



Si  $\omega_0=0$ : la velocidad decae exponencialmente.

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} = 0 \quad \longrightarrow \quad v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$



*Parece razonable que la solución sea una combinación de ambas*

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

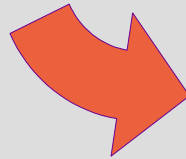
Si  $\omega_0 > \beta$ , la solución de la ec. diferencial es:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

Si  $\omega_0 > \beta$ , la solución de la ec. diferencial es:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



*Solución del movimiento débilmente amortiguado*

*( $\omega_0 > \beta$ )*

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

*con:*

$$\beta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

Si  $\omega_0 > \beta$ , la solución de la ec. diferencial es:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

*ejercicio: demostrar que  $x(t)$  es solución de la ec dif.*

**Solución del movimiento débilmente amortiguado**

**$(\omega_0 > \beta)$**

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

**con:**

$$\beta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

Si  $\omega_0 > \beta$ , la solución de la ec. diferencial es:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

*ejercicio: demostrar que  $x(t)$  es solución de la ec dif.*

**Solución del movimiento débilmente amortiguado**

**$(\omega_0 > \beta)$**

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

con:

$$\beta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Parámetro de amortiguamiento

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

Si  $\omega_0 > \beta$ , la solución de la ec. diferencial es:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

*ejercicio: demostrar que  $x(t)$  es solución de la ec dif.*

**Solución del movimiento débilmente amortiguado**

**( $\omega_0 > \beta$ )**

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

con:

$$\beta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Parámetro de amortiguamiento

Constante de amortiguamiento

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

Si  $\omega_0 > \beta$ , la solución de la ec. diferencial es:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

*ejercicio: demostrar que  $x(t)$  es solución de la ec dif.*

**Solución del movimiento débilmente amortiguado**

**( $\omega_0 > \beta$ )**

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

con:

$$\beta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Parámetro de amortiguamiento

Constante de amortiguamiento

Frecuencia angular natural o propia

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

Si  $\omega_0 > \beta$ , la solución de la ec. diferencial es:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

*ejercicio: demostrar que  $x(t)$  es solución de la ec dif.*

**Solución del movimiento débilmente amortiguado**  
( $\omega_0 > \beta$ )

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

con:

$$\beta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Parámetro de amortiguamiento

Constante de amortiguamiento

Frecuencia angular natural o propia

Frecuencia angular del mov.



## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

Si  $\omega_0 > \beta$ , la solución de la ec. diferencial es:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

*ejercicio: demostrar que  $x(t)$  es solución de la ec dif.*

**Solución del movimiento débilmente amortiguado**

**( $\omega_0 > \beta$ )**

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

con:

$$\beta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Parámetro de amortiguamiento

Constante de amortiguamiento

Frecuencia angular natural o propia

Constante de la fuerza recuperadora

Frecuencia angular del mov.

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

### Cinemática de las oscilaciones débilmente amortiguadas

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

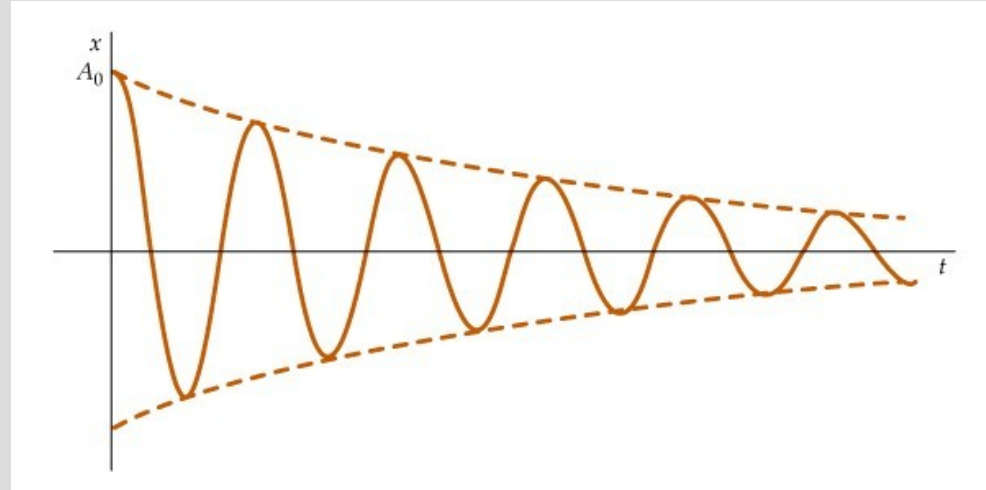
$$\beta = \frac{b}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

### Cinemática de las oscilaciones débilmente amortiguadas

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

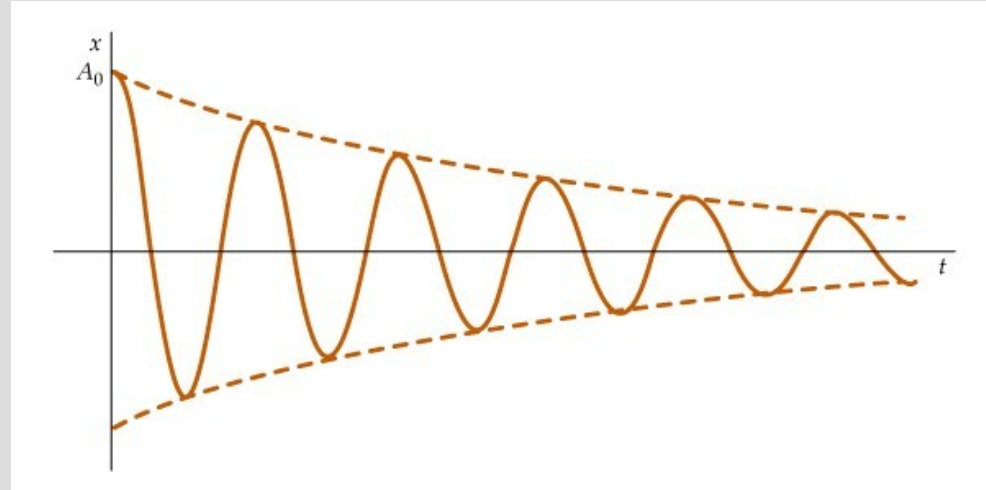


## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

### Cinemática de las oscilaciones débilmente amortiguadas

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



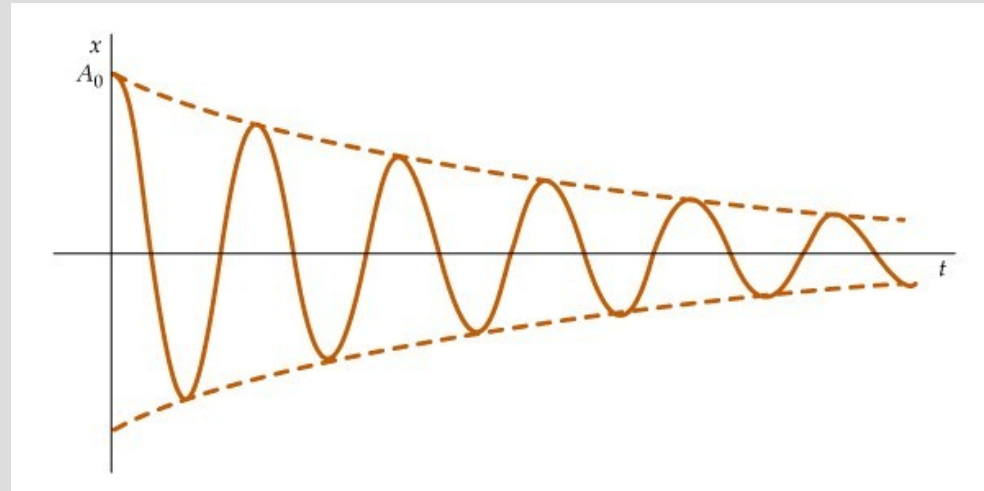
- No es un movimiento periódico (pero en algunos casos 'casi')

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

### Cinemática de las oscilaciones débilmente amortiguadas

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



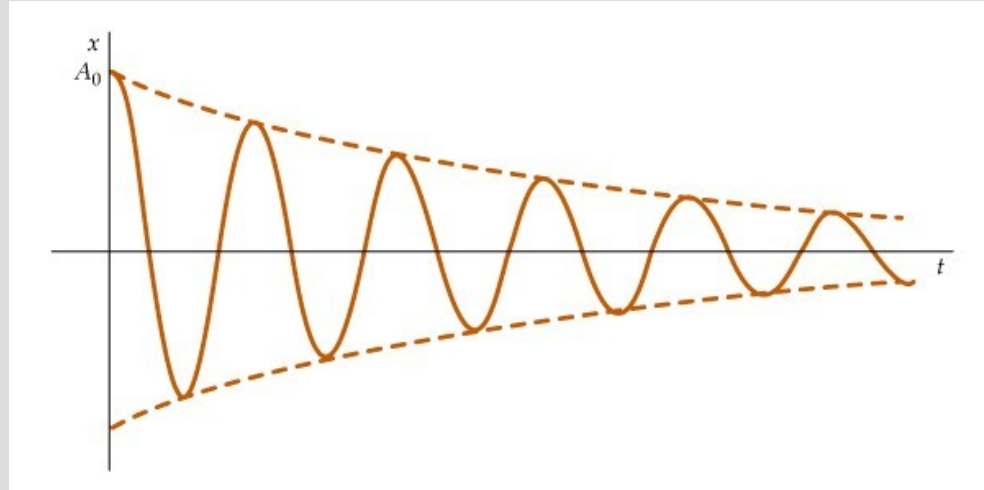
- No es un movimiento periódico (*pero en algunos casos 'casi'*)
- Si  $A e^{-\beta t}$  decae poco en un periodo, podemos considerarlo como la '*amplitud efectiva*' de un movimiento armónico (*casi un MAS*).

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

### Cinemática de las oscilaciones débilmente amortiguadas

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\beta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



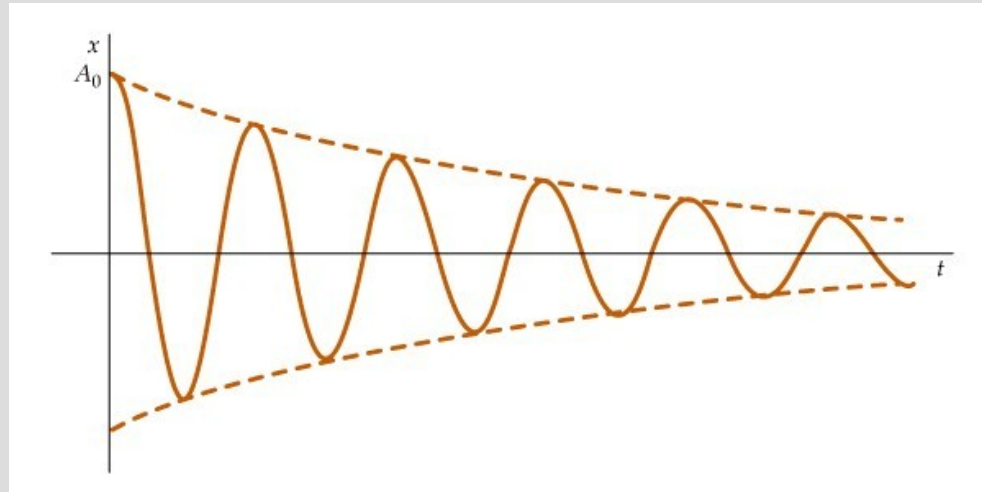
- No es un movimiento periódico (*pero en algunos casos 'casi'*)
- Si  $A e^{-\beta t}$  decae poco en un periodo, podemos considerarlo como la '*amplitud efectiva*' de un movimiento armónico (*casi un MAS*).
- El '*periodo*' del movimiento es  $\Delta t = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ , independiente de A

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

### Cinemática de las oscilaciones débilmente amortiguadas

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\beta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



- No es un movimiento periódico (*pero en algunos casos 'casi'*)
- Si  $A e^{-\beta t}$  decae poco en un periodo, podemos considerarlo como la '*amplitud efectiva*' de un movimiento armónico (*casi un MAS*).
- El '*periodo*' del movimiento es  $\Delta t = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ , independiente de A
- La frecuencia es menor que  $\omega_0$ , pero si  $\omega_0 \gg \beta \leftrightarrow \omega_1 \approx \omega_0$

Situación frecuente

## 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.

**Ejercicio:** demostrar que la pérdida relativa de amplitud por periodo en un oscilador armónico amortiguado es:

$$p = \frac{A(t) - A(t+T)}{A(t)} = 1 - e^{-\beta T}$$

**Ejercicio:** una partícula de masa  $m=2\text{kg}$  sujeta por un muelle de constante  $k=200\text{N/m}$  realiza oscilaciones amortiguadas y pierde  $\frac{1}{4}$  de su amplitud en 60 oscilaciones. Determinar el parámetro de amortiguamiento, la frecuencia angular del movimiento y la constante de amortiguamiento.

*Solución:*  $\beta=0.00763\text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_1=10\text{ s}^{-1}$ ,  $b=0.369\text{ kg/s}$

**Ejercicio:** sabiendo que la frecuencia angular de un oscilador amortiguado es el 95% de su frecuencia propia, ¿en qué % se reducirá la amplitud en cada oscilación?

*Solución:* se reduce un 12.7 %



# Módulo 1: Oscilaciones

## Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

- 1.1 Cinemática del MAS.
- 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
- 1.3 Ejemplos de MAS.  
(masa-muelle, péndulos, sistemas de muelles, ...)
- 1.4 Energía potencial elástica.
- 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
- 1.6 Método de la conservación de E.

## Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

- 2.1 Fuerza de fricción viscosa.
- 2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
- 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
- 2.4 **Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.**
- 2.5 **Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.**

## Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

- 3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
- 3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
- 3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
- 3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
- 3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
- 3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

## Lección 4. Superposición de varios MAS

- 4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
- 4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
- 4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
- 4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

Si  $\omega_0 \gg \beta$ , la amplitud disminuye muy poco en una oscilación.

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

Si  $\omega_0 \gg \beta$ , la amplitud disminuye muy poco en una oscilación.

Podemos asimilar el movimiento a un MAS

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

- Si  $\omega_0 \gg \beta$ , la amplitud disminuye muy poco en una oscilación.
- Podemos asimilar el movimiento a un MAS
- La energía se puede calcular, por lo tanto, como:

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

Si  $\omega_0 \gg \beta$ , la amplitud disminuye muy poco en una oscilación.

Podemos asimilar el movimiento a un MAS

La energía se puede calcular, por lo tanto, como:



$$E \approx \frac{1}{2} k A^2$$

*Energía  
del 'MAS'*

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

Si  $\omega_0 \gg \beta$ , la amplitud disminuye muy poco en una oscilación.

Podemos asimilar el movimiento a un MAS

La energía se puede calcular, por lo tanto, como:

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2$$

*Energía del 'MAS'*

$$E = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\beta t}$$

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

Si  $\omega_0 \gg \beta$ , la amplitud disminuye muy poco en una oscilación.

Podemos asimilar el movimiento a un MAS

La energía se puede calcular, por lo tanto, como:

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2$$

*Energía del 'MAS'*

$$E = \left( \frac{1}{2} k A_0^2 \right) e^{-2\beta t}$$

$E_0$



## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

Si  $\omega_0 \gg \beta$ , la amplitud disminuye muy poco en una oscilación.

Podemos asimilar el movimiento a un MAS

La energía se puede calcular, por lo tanto, como:

$E \approx \frac{1}{2} k A^2$  *Energía del 'MAS'*

$E = \left( \frac{1}{2} k A_0^2 \right) e^{-2\beta t} \rightarrow E = E_0 e^{-2\beta t}$  *Energía del MA*

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

Si  $\omega_0 \gg \beta$ , la amplitud disminuye muy poco en una oscilación.

Podemos asimilar el movimiento a un MAS

La energía se puede calcular, por lo tanto, como:

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2$$
 *Energía del 'MAS'*

Definiendo:  
$$\tau = \frac{1}{2\beta} = \frac{m}{b}$$

$$E = \left( \frac{1}{2} k A_0^2 \right) e^{-2\beta t} \rightarrow E = E_0 e^{-2\beta t} \rightarrow E = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

*Energía del MA*

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

Si  $\omega_0 \gg \beta$ , la amplitud disminuye muy poco en una oscilación.

Podemos asimilar el movimiento a un MAS

La energía se puede calcular, por lo tanto, como:

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2$$
 *Energía del 'MAS'*

Definiendo:  $\tau = \frac{1}{2\beta} = \frac{m}{b}$  *tiempo de relajación (para la energía)*

$$E = \left( \frac{1}{2} k A_0^2 \right) e^{-2\beta t} \rightarrow E = E_0 e^{-2\beta t} \rightarrow E = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

*Energía del MA*

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

Si  $\omega_0 \gg \beta$ , la amplitud disminuye muy poco en una oscilación.

Podemos asimilar el movimiento a un MAS

La energía se puede calcular, por lo tanto, como:

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2$$
 *Energía del 'MAS'*

Definiendo:  $\tau = \frac{1}{2\beta} = \frac{m}{b}$  *tiempo de relajación (para la energía)*

$$E = \left( \frac{1}{2} k A_0^2 \right) e^{-2\beta t} \rightarrow E = E_0 e^{-2\beta t} \rightarrow E = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

*Energía del MA*

**Ejercicio:** demuestra que si en una oscilación amortiguada  $p$  y  $q$  son la pérdida relativa de amplitud y energía respectivamente, se cumple:  $q = 2p - p^2$  ( $q \approx 2p$  si  $\beta \ll \omega_0$ )

**Ejercicio:** si  $x(t) = 0.360 e^{-t/50} \cos(60\pi(t-1/3))$  (en unidades SI), determinar el tiempo necesario para que la energía se reduzca a la mitad.

## 2.4 Energía del MA. Factor de calidad

El grado de amortiguamiento de un oscilador se caracteriza por el '**factor de calidad**':

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía del oscilador}}{|\text{Energía perdida por ciclo}|}$$

## 2.4 Energía del MA. Factor de calidad

El grado de amortiguamiento de un oscilador se caracteriza por el '**factor de calidad**':

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía del oscilador}}{|\text{Energía perdida por ciclo}|}$$

Sustituyendo fórmulas (caso  $\omega_0 \gg \beta$ ):

## 2.4 Energía del MA. Factor de calidad

El grado de amortiguamiento de un oscilador se caracteriza por el '**factor de calidad**':

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía del oscilador}}{|\text{Energía perdida por ciclo}|}$$

Sustituyendo fórmulas (caso  $\omega_0 \gg \beta$ ):

$$Q = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{\dots}$$

## 2.4 Energía del MA. Factor de calidad

El grado de amortiguamiento de un oscilador se caracteriza por el '**factor de calidad**':

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía del oscilador}}{|\text{Energía perdida por ciclo}|}$$

Sustituyendo fórmulas (caso  $\omega_0 \gg \beta$ ):

$$Q = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{\dots}$$

**Aproximación a 1<sup>er</sup> orden**  
(supone que la energía decae linealmente durante un periodo, equivalente a suponer:  $\beta \ll \omega_0$ )



## 2.4 Energía del MA. Factor de calidad

El grado de amortiguamiento de un oscilador se caracteriza por el '**factor de calidad**':

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía del oscilador}}{|\text{Energía perdida por ciclo}|}$$

Sustituyendo fórmulas (caso  $\omega_0 \gg \beta$ ):

$$Q = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{-\frac{d}{dt}(E_0 e^{-2\beta t}) \cdot T}$$

**Aproximación a 1<sup>er</sup> orden**  
(supone que la energía decae linealmente durante un periodo, equivalente a suponer:  $\beta \ll \omega_0$ )

## 2.4 Energía del MA. Factor de calidad


El grado de amortiguamiento de un oscilador se caracteriza por el '**factor de calidad**':

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía del oscilador}}{|\text{Energía perdida por ciclo}|}$$

Sustituyendo fórmulas (caso  $\omega_0 \gg \beta$ ):

$$Q = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{-\frac{d}{dt}(E_0 e^{-2\beta t}) \cdot T}$$

**Aproximación a 1<sup>er</sup> orden**  
(supone que la energía decae linealmente durante un periodo, equivalente a suponer:  $\beta \ll \omega_0$ )


$$Q = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{+2\beta E_0 e^{-2\beta t} \cdot T}$$

## 2.4 Energía del MA. Factor de calidad


El grado de amortiguamiento de un oscilador se caracteriza por el '**factor de calidad**':

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía del oscilador}}{|\text{Energía perdida por ciclo}|}$$

Sustituyendo fórmulas (caso  $\omega_0 \gg \beta$ ):

$$Q = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{-\frac{d}{dt}(E_0 e^{-2\beta t}) \cdot T}$$

**Aproximación a 1<sup>er</sup> orden**  
(supone que la energía decae linealmente durante un periodo, equivalente a suponer:  $\beta \ll \omega_0$ )


$$Q = 2\pi \frac{\cancel{E_0 e^{-2\beta t}}}{+2\beta \cancel{E_0 e^{-2\beta t}} \cdot T}$$

## 2.4 Energía del MA. Factor de calidad


El grado de amortiguamiento de un oscilador se caracteriza por el '**factor de calidad**':

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía del oscilador}}{|\text{Energía perdida por ciclo}|}$$

Sustituyendo fórmulas (caso  $\omega_0 \gg \beta$ ):

$$Q = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{-\frac{d}{dt}(E_0 e^{-2\beta t}) \cdot T}$$

**Aproximación a 1<sup>er</sup> orden**  
(supone que la energía decae linealmente durante un periodo, equivalente a suponer:  $\beta \ll \omega_0$ )


$$Q = 2\pi \frac{\cancel{E_0 e^{-2\beta t}}}{+2\beta \cancel{E_0 e^{-2\beta t}} \cdot T} = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{2\beta}$$

## 2.4 Energía del MA. Factor de calidad


El grado de amortiguamiento de un oscilador se caracteriza por el '**factor de calidad**':

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía del oscilador}}{|\text{Energía perdida por ciclo}|}$$

Sustituyendo fórmulas (caso  $\omega_0 \gg \beta$ ):

$$Q = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{-\frac{d}{dt}(E_0 e^{-2\beta t}) \cdot T}$$

**Aproximación a 1<sup>er</sup> orden**  
(supone que la energía decae linealmente durante un periodo, equivalente a suponer:  $\beta \ll \omega_0$ )


$$Q = 2\pi \frac{\cancel{E_0} e^{-2\beta t}}{+2\beta \cancel{E_0} e^{-2\beta t} \cdot T} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \left(\frac{1}{2\beta}\right)$$

$\omega_1$                        $\tau$

## 2.4 Energía del MA. Factor de calidad

El grado de amortiguamiento de un oscilador se caracteriza por el '**factor de calidad**':

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía del oscilador}}{|\text{Energía perdida por ciclo}|}$$

Sustituyendo fórmulas (caso  $\omega_0 \gg \beta$ ):

$$Q = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{-\frac{d}{dt}(E_0 e^{-2\beta t}) \cdot T}$$

**Aproximación a 1<sup>er</sup> orden**  
(supone que la energía decae linealmente durante un periodo, equivalente a suponer:  $\beta \ll \omega_0$ )

$$Q = 2\pi \frac{\cancel{E_0} e^{-2\beta t}}{+2\beta \cancel{E_0} e^{-2\beta t} \cdot T} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \left(\frac{1}{2\beta}\right)$$

$\omega_1$                        $\tau$

$$Q = \omega_1 \tau \approx \omega_0 \tau$$

**Factor de calidad**  
(si  $\beta \ll \omega_0$ )

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

En un MA general (aunque no cumpla  $\omega_0 \gg \beta$ ), se puede calcular la energía que disipa  $F_r$  integrando la potencia disipada:

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

En un MA general (aunque no cumpla  $\omega_0 \gg \beta$ ), se puede calcular la energía que disipa  $F_r$  integrando la potencia disipada:

Potencia disipada:

$$P_D = F_r \cdot v$$



## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

En un MA general (aunque no cumpla  $\omega_0 \gg \beta$ ), se puede calcular la energía que disipa  $F_r$  integrando la potencia disipada:

Potencia disipada:

$$P_D = F_r \cdot v$$

$$F_r = -bv \rightarrow P_D = -bv^2$$

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

En un MA general (aunque no cumpla  $\omega_0 \gg \beta$ ), se puede calcular la energía que disipa  $F_r$  integrando la potencia disipada:

Potencia disipada:

$$P_D = F_r \cdot v$$

$$F_r = -bv$$

$$P_D = -bv^2$$

Energía del sistema  
en función del tiempo:

$$E = E_0 + \int_0^t P_D dt$$

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

En un MA general (aunque no cumpla  $\omega_0 \gg \beta$ ), se puede calcular la energía que disipa  $F_r$  integrando la potencia disipada:

Potencia disipada:

$$P_D = F_r \cdot v$$

$$F_r = -bv$$

$$P_D = -bv^2$$

Energía del sistema  
en función del tiempo:

$$E = E_0 + \int_0^t P_D dt$$

$$E = \frac{1}{2} k A_0^2 - \int_0^t b v^2 dt$$

## 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas.

En un MA general (aunque no cumpla  $\omega_0 \gg \beta$ ), se puede calcular la energía que disipa  $F_r$  integrando la potencia disipada:

Potencia disipada:

$$P_D = F_r \cdot v$$

$$F_r = -bv$$

$$P_D = -bv^2$$

Energía del sistema en función del tiempo:

$$E = E_0 + \int_0^t P_D dt$$

$$E = \frac{1}{2} k A_0^2 - \int_0^t b v^2 dt$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi))$$

y haciendo la integral

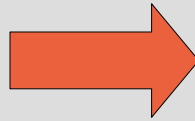
$$E = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 e^{-2\beta t} \left( 1 + 2\beta \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_1 t) + \frac{2\beta^2}{\omega_1} \cos^2(\omega_1 t) \right)$$

**Ejercicio:** demostrar que si:  $\omega_1 \approx \omega_0 \gg \beta$ ,  $E \approx E_0 e^{-2\beta t}$

## 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento

Hemos visto la solución de la ec. diferencial si  $\omega_0 > \beta$ :

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



*Solución del movimiento débilmente amortiguado*

**$(\omega_0 > \beta)$**

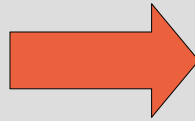
$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

## 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento

Hemos visto la solución de la ec. diferencial si  $\omega_0 > \beta$ :

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



*Solución del movimiento débilmente amortiguado*  
 $(\omega_0 > \beta)$

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

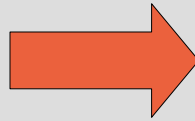
$$\beta = \frac{b}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Pero que pasa si  $\omega_0 \leq \beta$ :

## 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento

Hemos visto la solución de la ec. diferencial si  $\omega_0 > \beta$ :

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



*Solución del movimiento débilmente amortiguado*  
( $\omega_0 > \beta$ )

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Pero que pasa si  $\omega_0 \leq \beta$ :

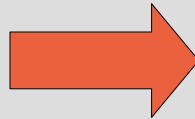


Hay dos casos:

## 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento

Hemos visto la solución de la ec. diferencial si  $\omega_0 > \beta$ :

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



*Solución del movimiento débilmente amortiguado*  
( $\omega_0 > \beta$ )

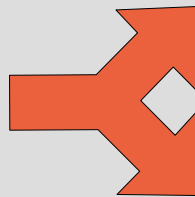
$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Pero que pasa si  $\omega_0 \leq \beta$ :



Hay dos casos:



**Amortiguamiento crítico** ( $\omega_0 = \beta$ )

**Sobreamortiguamiento** ( $\omega_0 < \beta$ )



## 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento

**Amortiguamiento crítico** ( $\omega_0 = \beta$ )

## 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento

### Amortiguamiento crítico ( $\omega_0 = \beta$ )

La solución de la ec. diferencial es:

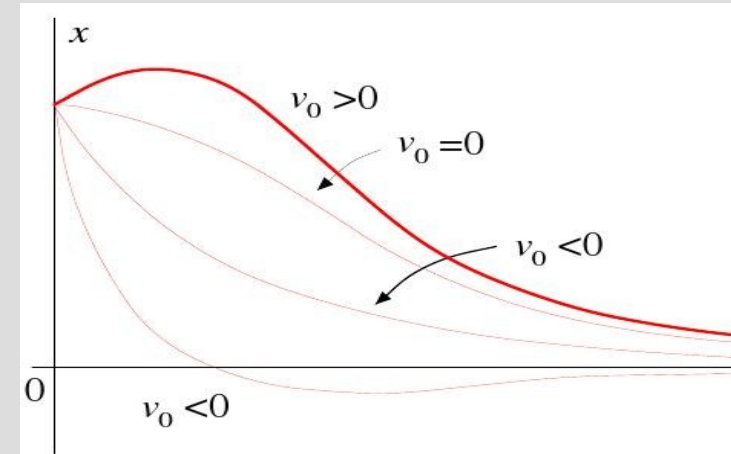
$$x(t) = (x_0 + (v_0 + \beta x_0) t) e^{-\beta t}$$

## 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento

### Amortiguamiento crítico ( $\omega_0 = \beta$ )

La solución de la ec. diferencial es:

$$x(t) = (x_0 + (v_0 + \beta x_0) t) e^{-\beta t}$$



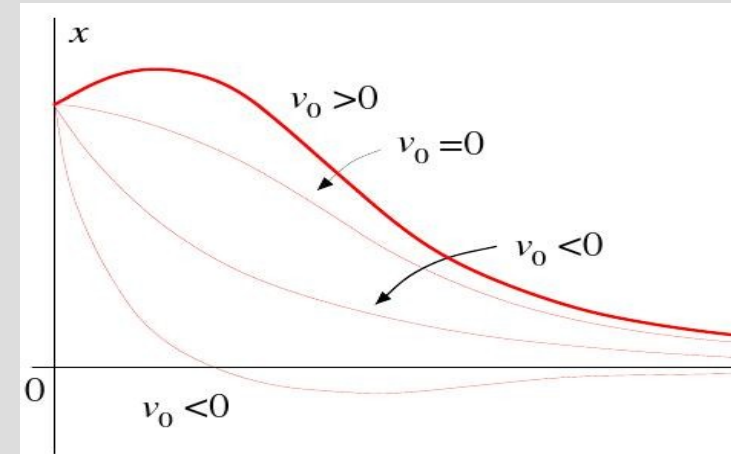
## 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento

### Amortiguamiento crítico ( $\omega_0 = \beta$ )

La solución de la ec. diferencial es:

$$x(t) = (x_0 + (v_0 + \beta x_0) t) e^{-\beta t}$$

- Ya no hay varias oscilaciones
- Puede aparecer una sola oscilación, según las condiciones iniciales.



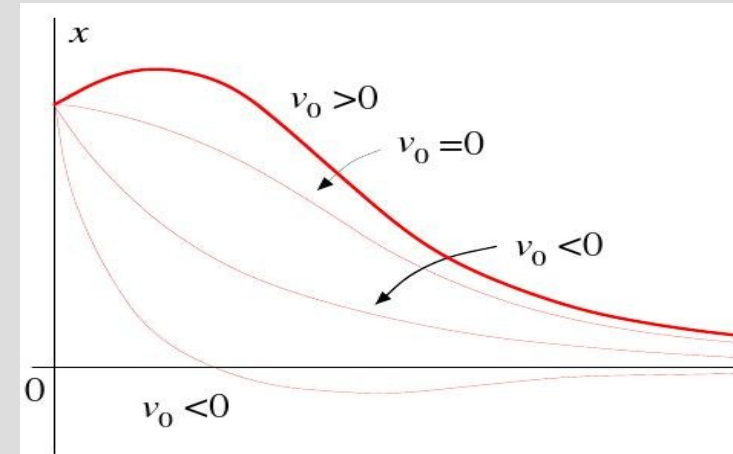
## 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento

### Amortiguamiento crítico ( $\omega_0 = \beta$ )

La solución de la ec. diferencial es:

$$x(t) = (x_0 + (v_0 + \beta x_0) t) e^{-\beta t}$$

- Ya no hay varias oscilaciones
- Puede aparecer una sola oscilación, según las condiciones iniciales.



### Sobreamortiguamiento ( $\omega_0 < \beta$ )

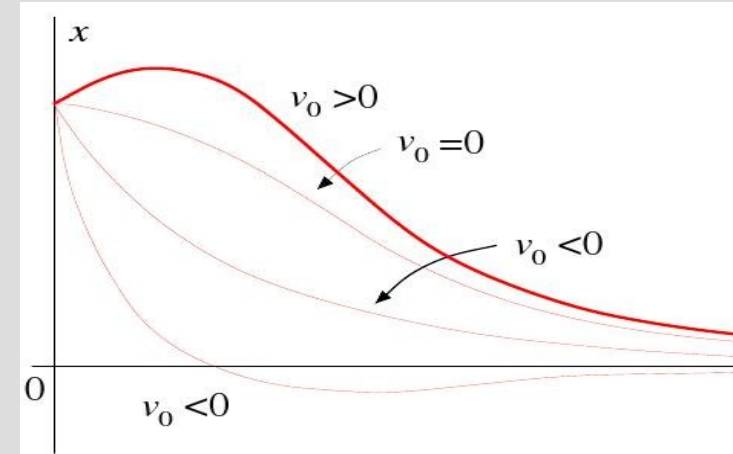
## 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento

### Amortiguamiento crítico ( $\omega_0 = \beta$ )

La solución de la ec. diferencial es:

$$x(t) = (x_0 + (v_0 + \beta x_0) t) e^{-\beta t}$$

- Ya no hay varias oscilaciones
- Puede aparecer una sola oscilación, según las condiciones iniciales.



### Sobreamortiguamiento ( $\omega_0 < \beta$ )

La solución de la ec. diferencial es:

$$x(t) = (A_1 e^{-\omega'_1 t} + A_2 e^{+\omega'_1 t}) e^{-\beta t}$$

- Tampoco en este caso hay oscilaciones

Siendo:

$$A_1 = -\frac{v_0 + (\beta - \omega'_1) x_0}{2\omega'_1}$$

$$A_2 = \frac{v_0 + (\beta + \omega'_1) x_0}{2\omega'_1}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

## 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento

### Amortiguamiento crítico ( $\omega_0 = \beta$ )

La solución de la ec. diferencial es:

$$x(t) = (x_0 + (v_0 + \beta x_0) t) e^{-\beta t}$$

- Ya no hay varias oscilaciones
- Puede aparecer una sola oscilación, según las condiciones iniciales.

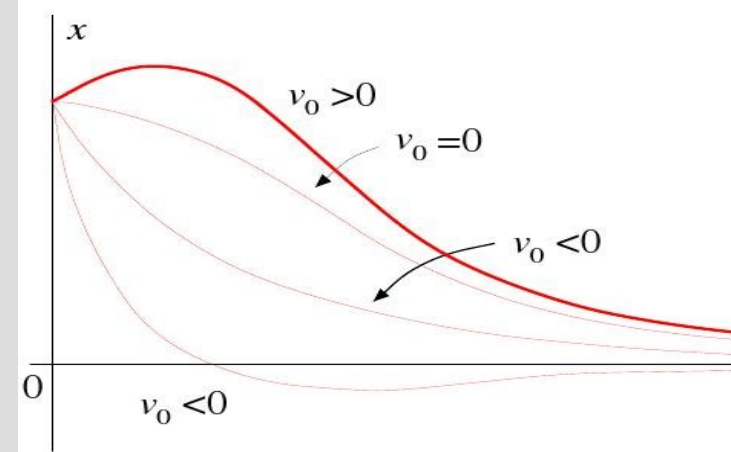
### Sobreamortiguamiento ( $\omega_0 < \beta$ )

La solución de la ec. diferencial es:

$$x(t) = \left( A_1 e^{-\omega'_1 t} + A_2 e^{+\omega'_1 t} \right) e^{-\beta t}$$

- Tampoco en este caso hay oscilaciones

*En amortiguamiento crítico, es cuando la partícula llega al equilibrio en menos tiempo*



*Siendo:*

$$A_1 = -\frac{v_0 + (\beta - \omega'_1) x_0}{2 \omega'_1}$$

$$A_2 = \frac{v_0 + (\beta + \omega'_1) x_0}{2 \omega'_1}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

# Oscilaciones amortiguadas.

**Ejercicio:** un péndulo simple tiene un periodo de 2s y una amplitud de  $2^\circ$ . Si después de 10 oscilaciones su amplitud disminuye en  $0.5^\circ$ , determinar el parámetro de amortiguamiento y la pérdida relativa de amplitud y energía.

*Solución:*  $\beta=0.01438 \text{ s}^{-1}$  ,  $p=0.25$ ,  $q=0.437$

**Ejercicio (prob 22):** dos cuerpos unidos entre si de masas M y m están en equilibrio colgados del techo mediante un muelle de constante k. En un determinado instante se retira el cuerpo de masa m por lo que el cuerpo M empieza a oscilar, realizando oscilaciones amortiguadas por el rozamiento con el aire. Se pide:

- Energía con la que empieza a oscilar el cuerpo.
- Pérdida relativa de energía ( $q$ ) en función de la pérdida relativa de amplitud ( $p$ ).
- Si  $M=100\text{g}$ ,  $m=30\text{g}$ ,  $k=25\text{N/m}$ ,  $p=1.50\%$ , determinar el tiempo necesario para que la energía sea la cuarta parte del valor inicial

*Solución:*  $E_0 = \frac{m^2 g^2}{2k}$  ,  $q = 2p - p^2 \approx 2p$  ,  $\Delta t = 18.2 \text{ s}$



## Cuestiones Osc. Amortiguadas (contesta razonadamente).

1. En un oscilador armónico amortiguado la energía decrece describiendo oscilaciones de amplitud decreciente.
2. La energía de un oscilador muy débilmente amortiguado es proporcional al cuadrado de su amplitud efectiva.
3. El parámetro de amortiguamiento tiene las mismas unidades que la constante de amortiguamiento.
4. Si  $\omega_0 < \beta$  la partícula se aproximará a la posición de equilibrio sin realizar oscilaciones y en el menor tiempo posible.
5. El factor de calidad es una magnitud que sólo está definida para el movimiento débilmente amortiguado.
6. La energía de un oscilador débilmente amortiguado decrece exponencialmente con el tiempo.
7. Los amortiguadores de un coche son un ejemplo de sistema débilmente amortiguado.
8. El periodo de un oscilador débilmente amortiguado aumenta a medida que la partícula pierde velocidad.

# Módulo 1: Oscilaciones

## Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

- 1.1 Cinemática del MAS.
- 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
- 1.3 Ejemplos de MAS.  
(masa-muelle, péndulos, sistemas de muelles, ...)
- 1.4 Energía potencial elástica.
- 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
- 1.6 Método de la conservación de E.

## Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

- 2.1 Fuerza de fricción viscosa.
- 2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
- 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
- 2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.
- 2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

## Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

- 3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
- 3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
- 3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
- 3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
- 3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
- 3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

## Lección 4. Superposición de varios MAS

- 4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
- 4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
- 4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
- 4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

## Lección 3: Movimiento armónico forzado

Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica  
Muchas veces interesa forzar la oscilación (*sino se detendría*)

## Lección 3: Movimiento armónico forzado

Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica  
Muchas veces interesa forzar la oscilación (*sino se detendría*)



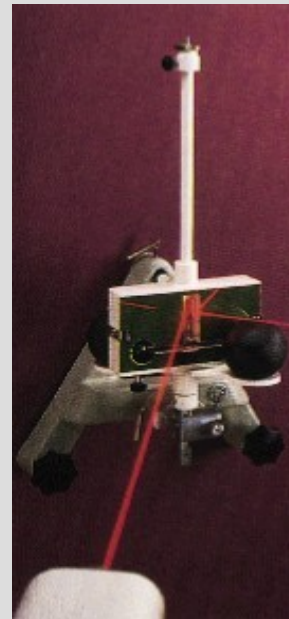
## Lección 3: Movimiento armónico forzado

Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica  
Muchas veces interesa forzar la oscilación (*sino se detendría*)



## Lección 3: Movimiento armónico forzado

Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica  
Muchas veces interesa forzar la oscilación (*sino se detendría*)

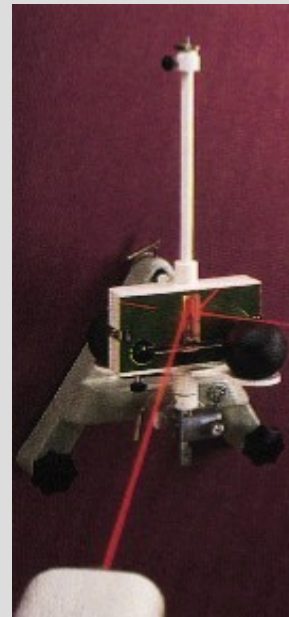


## Lección 3: Movimiento armónico forzado

Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica  
Muchas veces interesa forzar la oscilación (*sino se detendría*)



<http://www.youtube.com/watch?v=17tqXgvCN0E>

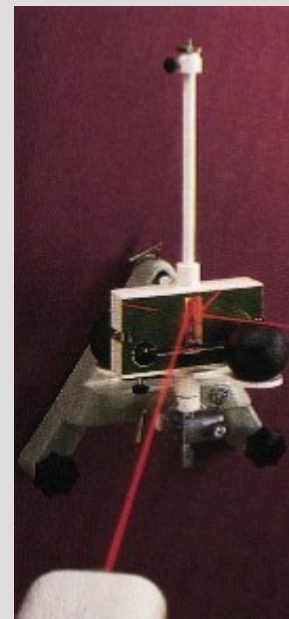


## Lección 3: Movimiento armónico forzado

Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica  
Muchas veces interesa forzar la oscilación (*sino se detendría*)



<http://www.youtube.com/watch?v=17tqXgvCN0E>



<http://www.youtube.com/watch?v=6fMYqAmVGzU>

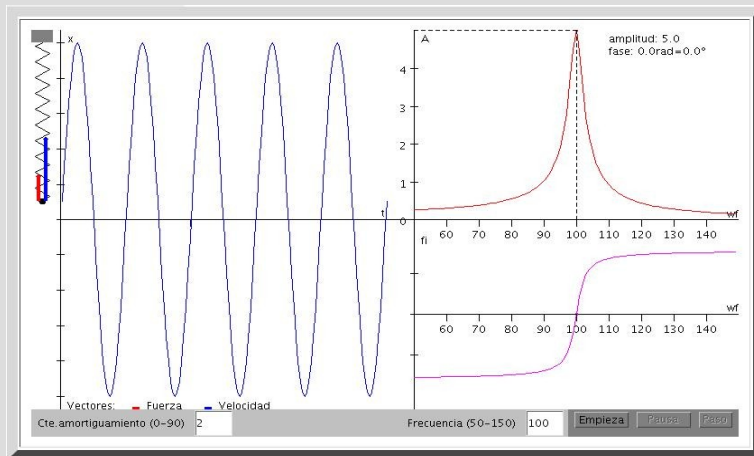


# Lección 3: Movimiento armónico forzado

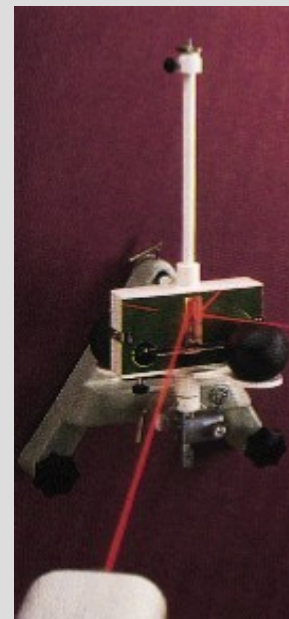
Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica  
Muchas veces interesa forzar la oscilación (*sino se detendría*)



<http://www.youtube.com/watch?v=17tqXgvCN0E>



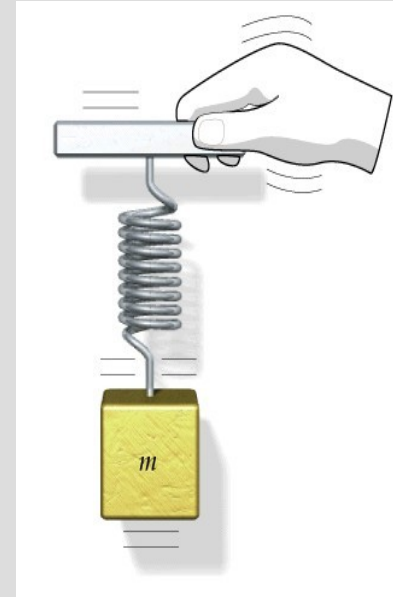
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/>



<http://www.youtube.com/watch?v=6fMYqAmVGzU>

## 3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

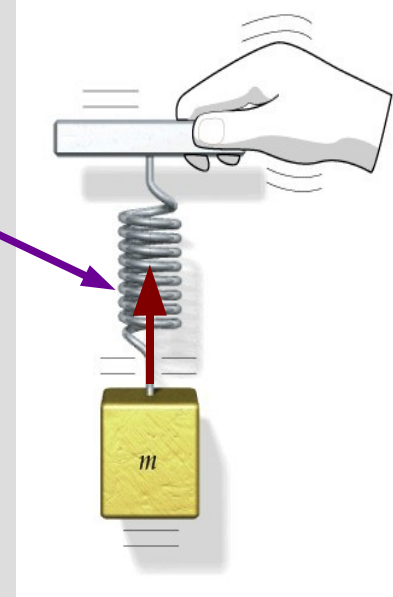
Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**.



## 3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**.

$$F_{el} = -k x$$

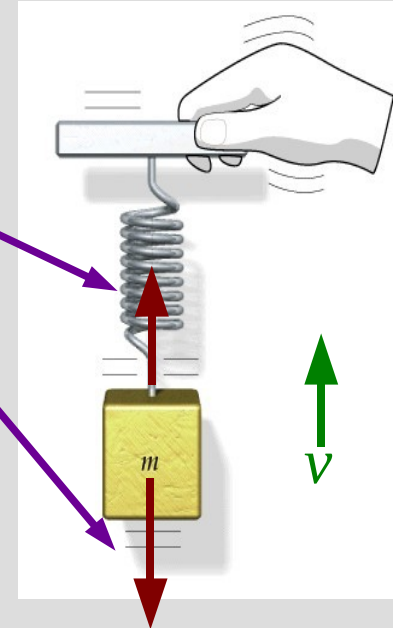


## 3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**.

$$F_{el} = -k x$$

$$F_r = -b v$$



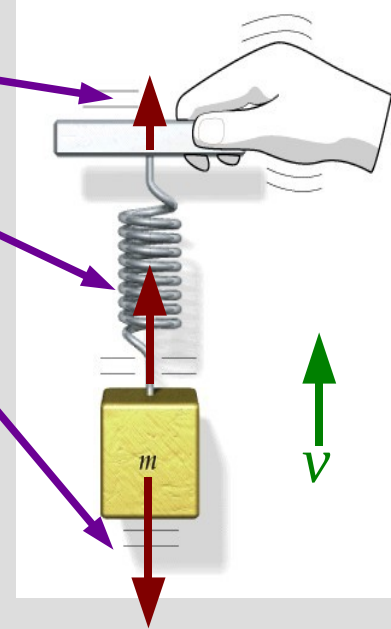
## 3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**.

$$F_{osc} = F_0 \cos(\omega t)$$

$$F_{el} = -k x$$

$$F_r = -b v$$



## 3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

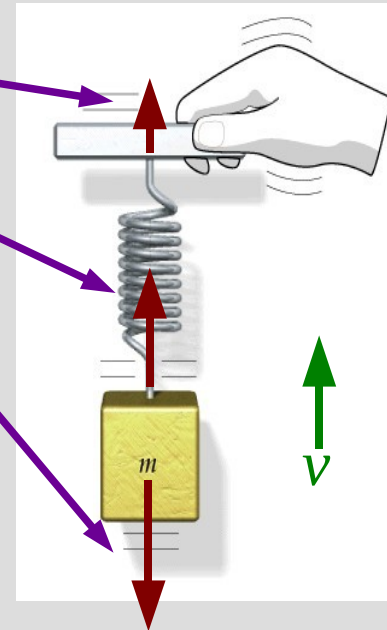
Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**.

- *Es una expresión sencilla*
- *Se puede generar fácilmente*

$$F_{osc} = F_0 \cos(\omega t)$$

$$F_{el} = -k x$$

$$F_r = -b v$$



## 3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**.

- *Es una expresión sencilla*
- *Se puede generar fácilmente*

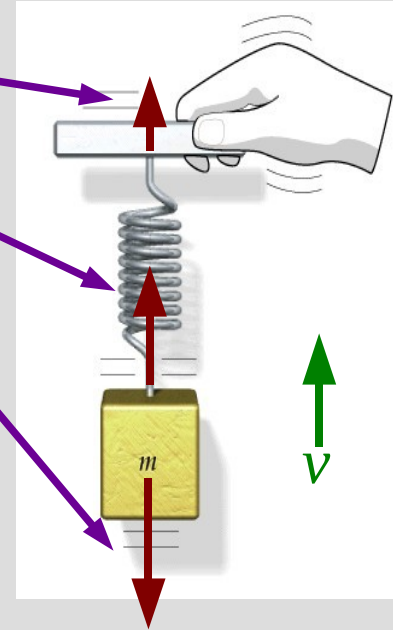
$$F_{osc} = F_0 \cos(\omega t)$$

$$F_{el} = -k x$$

$$F_r = -b v$$

La 2<sup>da</sup> ley de Newton queda:

$$\sum F = -k x - b \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) = m \ddot{x}$$



## 3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**.

- Es una expresión sencilla
- Se puede generar fácilmente

$$F_{osc} = F_0 \cos(\omega t)$$

$$F_{el} = -k x$$

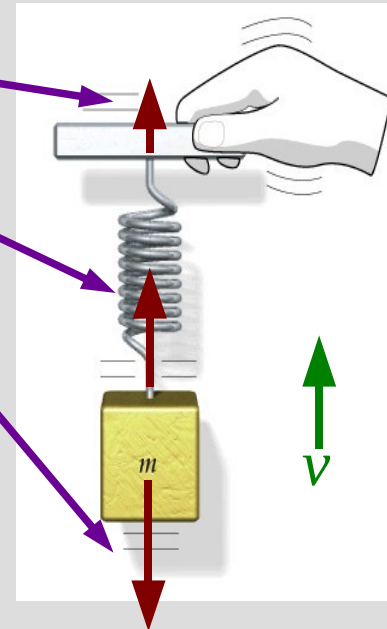
$$F_r = -b v$$

La 2<sup>da</sup> ley de Newton queda:

$$\sum F = -k x - b \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

**Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas**





## 3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

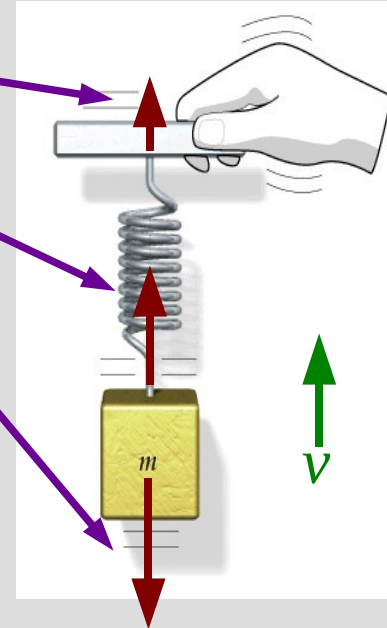
Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**.

- Es una expresión sencilla
- Se puede generar fácilmente

$$F_{osc} = F_0 \cos(\omega t)$$

$$F_{el} = -k x$$

$$F_r = -b v$$



La 2<sup>da</sup> ley de Newton queda:

$$\sum F = -k x - b \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

**Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas**

Donde:

- $\beta = b/2m$  es el *parámetro de amortig.*
- $\omega_0^2 = k/m$  es la *frecuencia angular natural del oscilador al cuadrado.*
- $\omega$  : es la *frecuencia angular de la fuerza oscilante*

## 3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

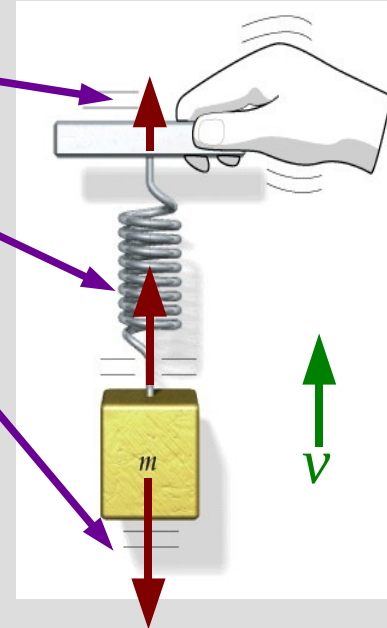
Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**.

- Es una expresión sencilla
- Se puede generar fácilmente

$$F_{osc} = F_0 \cos(\omega t)$$

$$F_{el} = -k x$$

$$F_r = -b v$$



La 2<sup>da</sup> ley de Newton queda:

$$\sum F = -k x - b \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

Es una ecuación diferencial de **segundo orden, lineal, a coeficientes constantes y no homogénea.**

**Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas**

Donde:

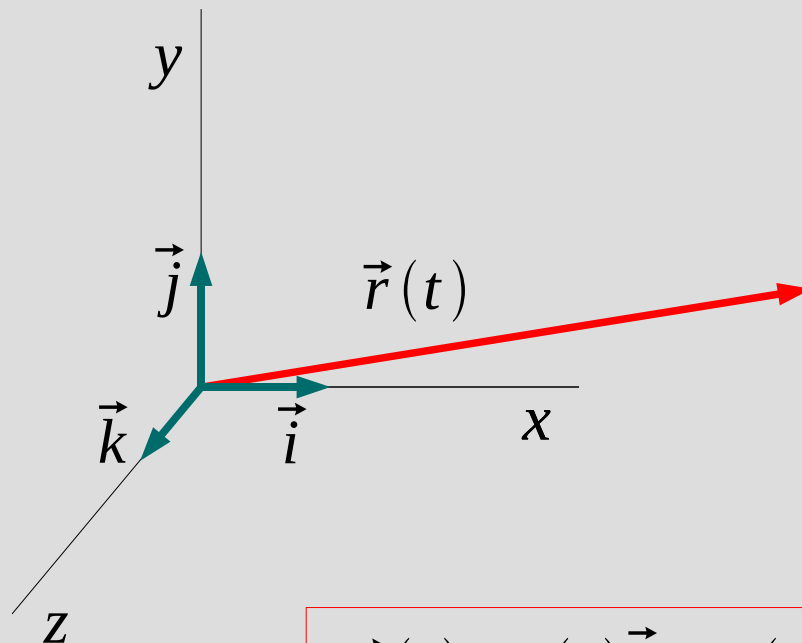
- $\beta = b/2m$  es el **parámetro de amortig.**
- $\omega_0^2 = k/m$  es la **frecuencia angular natural** del oscilador al cuadrado.
- $\omega$  : es la **frecuencia angular de la fuerza oscilante**



## 5.1. Conceptos básicos

### *Vector velocidad*

- La velocidad nos indica cómo cambia la posición de la partícula dividido entre el tiempo empleado
- **En una dimensión:**



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$